
ASTRONOMIA GEODÉSICA

Posicionamento pelas Estrelas

Basílio Santiago

Adriano Salviano

ÍNDICE

NOTA DOS AUTORES

CAPÍTULO 1

CONCEITOS FUNDAMENTAIS E SISTEMAS DE COORDENADAS

- Introdução à Astronomia Geodésica
- Sistema Horizontal de Coordenadas
- Sistema Equatorial de Coordenadas
 - Ângulo horário
 - Precessão
- Relação entre os Sistemas Horizontal e Equatorial
- Outros sistemas de coordenadas
 - Coordenadas eclípticas
 - Coordenadas Galácticas
- Fundamentos de Geodésia
 - História da Geodésia
 - A figura da Terra
 - O Elipsóide de Revolução
 - Geóide
 - Sistema Geodésico de Referência
 - Determinação de Posição pela Astronomia

CAPÍTULO 2

ESTUDO ANALÍTICO DO MOVIMENTO DIURNO

- Movimento diurno dos astros
- Passagem meridiana
- Estrelas circumpolares e estrelas invisíveis
- Movimento diurno: exemplos do efeito da latitude do observador
- Trigonometria Esférica
 - Triângulos Esféricos
 - Fórmulas de Trigonometria Esférica
- Astronomia Esférica
 - Situações especiais

CAPÍTULO 3

MOVIMENTO ANUAL DO SOL E SISTEMAS DE TEMPO

- Movimento Anual do Sol
- Estações do ano e eclipses
 - As estações do ano em nosso planeta
 - Eclipses
- Sistemas de Medida de Tempo
 - Instante, Hora, Intervalo e Estado de Cronômetro
 - As diferentes definições de hora
- Conversão entre Sistemas de Medida de Tempo
 - Conversão de tempo solar em sideral
 - Tabela do Anuário Astronômico do Observatório Nacional
 - Tabela do *Astronomical Almanac*
 - Conversão de tempo sideral em solar
- Equação do Tempo

- Tabela do Anuário Astronômico do ON contendo os valores da Equação do Tempo
- Tabela do *Astronomical Almanac* contendo os valores da Equação do Tempo
- Equação do Centro
- Redução ao Equador

CAPÍTULO 4

CORREÇÕES ÀS COORDENADAS EQUATORIAIS

- Variação de Coordenadas Equatoriais
- Precessão
- Nutação
 - Tabela do Anuário Astronômico do Observatório Nacional
 - Tabela do *Apparent Places of Stars*
 - Deslocamento do Pólo Celeste
- Movimento do Pólo
- Astrometria
- Aberração
- Refração
 - Tabela do Anuário Astronômico do ON com valores de Refração média para diferentes distâncias zenitais
 - Tabela do Anuário Astronômico do ON com os fatores de correção de R_m para T e P
- Paralaxe e unidades de distância em Astronomia
- Movimentos Próprios
- Catálogos de Estrelas e Atlas na Web
- Redução das coordenadas astronômicas
 - Tabela do *Astronomical Almanac* com os números Besselianos
 - Tabela com valores dos números Besselianos de 2ª ordem
 - Tabela do *Astronomical Almanac* com os valores das coordenadas cartesianas X,Y,Z

CAPÍTULO 5

PRÁTICAS DE DETERMINAÇÃO ASTRONÔMICA

- Roteiro para preparação de relatório de prática astronômica
- Roteiro para montagem, nivelamento e calibração de Teodolito
- 1ª Prática – Determinação do meridiano astronômico e do azimute de uma mira usando a culminação de uma estrela
 - Procedimento Observacional
 - Exemplo
- 2ª Prática – Determinação do meridiano astronômico e do azimute de uma mira usando uma estrela em elongação
 - Procedimento Observacional
 - Exemplo
- 3ª Prática – Determinação de latitude usando o Método de Sterneck
 - Procedimento Observacional
 - Exemplo
- 4ª Prática – Determinação de longitude usando Método das Alturas Iguais
 - Procedimento Observacional
- 5ª Prática – Determinação de longitude usando Método das Distâncias Zenitais Absolutas
 - Procedimento Observacional
 - Exemplo
- 6ª Prática – Determinação da hora pelo Método de Zinger

CAPÍTULO 6

– EXERCÍCIOS COM SOLUÇÕES

- Exercícios de Passagem Meridiana e Coordenadas Horizontais

- Exercícios de Trigonometria Esférica e Movimento Diurno
- Exercícios de Sistemas de Tempo
- Exercícios sobre variações de Coordenadas Equatoriais

CAPÍTULO 7

APÊNDICES

- Glossário de conceitos de Astronomia de Posição
 - Esfera Celeste
 - Sistema Horizontal
 - Sistema Equatorial
- Quadro Resumo de Coordenadas Celestes
- Dedução das Fórmulas do Método de Zinger

BIBLIOGRAFIA

NOTAS DOS AUTORES

Este texto tem uma origem curiosa, pois seguiu um caminho possivelmente inverso da maioria. Inicialmente foi produzido em formato de hipertexto a ser acessado pela Internet e somente agora está sendo publicado na forma tradicional. Para os que têm acesso à Internet sempre vale à pena conhecer o material em sua versão eletrônica: <http://www.if.ufrgs.br/~santiago/lectures/fis2005>, até porque as atualizações se dão mais rapidamente para este último.

O endereço do hipertexto dado acima é parte do sítio Internet do Instituto de Física da UFRGS. Este material foi inicialmente confeccionado com o objetivo de ajudar os alunos e professores de disciplinas de Astronomia Posicional, Fundamental e Geodésica. Trata-se, portanto, de material didático concebido como apoio ao ensino universitário. Por outro lado, o leigo interessado em Astronomia e dispondo de conhecimento de matemática elementar como geometria e trigonometria certamente vai se beneficiar deste material.

Na elaboração do hipertexto, originalmente foram usados trechos e figuras de alguns livros e sítios disponíveis na Web, incluindo-se sítios do exterior. A tradução do inglês para o português, quando necessária, foi feita por este autor. Os livros e sites da Web de onde foram retiradas partes dos conteúdos que originalmente compunham o hipertexto, são os seguintes:

- Boczek, I., “Conceitos de Astronomia”;
- Gemael, C., “Astronomia Esférica”;
- Hatschbach, F., “Determinações Astronômicas”;
- Astronomy 250 lecture notes. Endereço na Web:
<http://ircamera.as.arizona.edu/astr_250/class_syl.html>;
- Tutorials for Astronomy. Endereço na Web: <<http://www.physics.csbsju.edu/astro/>>;
- Roy Fisher's Earth Rotation and Equatorial Coordinates web page. Endereço na Web:
<http://www.gb.nrao.edu/~rfisher/Ephemerides/earth_rot.html>;
- Terry Moore's web page on Coordinate Systems, Frames and Datums. Endereço na Web:
<<http://granby.nott.ac.uk/~iszwww/coord1.htm>>;

Tanto o hipertexto quanto o livro evoluíram com o tempo, sendo que a elaboração da versão impressa, resultado de um projeto apoiado pelas Pró-Reitorias de Ensino e Pesquisa da UFRGS, foi um dos principais impulsionadores deste processo de aprimoramento. O material aos poucos foi sendo modificado e adaptado por este autor, levando-se em conta os conteúdos da disciplina de Astronomia Geodésica I e II, do curso de Engenharia Cartográfica da UFRGS, além das demais disciplinas oferecidas pelo Departamento de Astronomia desta universidade. Figuras semelhantes às originais, por vezes melhoradas, bem como figuras novas, foram confeccionadas em sua maior parte

por Adriano Salviano, formando de Engenharia Cartográfica da UFRGS e co-autor desta versão impressa principalmente na parte de Sistema Geodésico de Referência. Mudanças no texto e no ordenamento da exposição dos tópicos abordados se deveram em parte às novas figuras, mas também ao próprio processo de aprofundamento didático dos autores. Todos os capítulos do texto foram ampliadas com relação à versão original, em especial os capítulos conceituais e o capítulos de problemas com soluções. O Capítulo 5 em diante são, na verdade, um diferencial importante deste livro didático, pois enfatizam a prática astronômica, dando assim maior clareza aos conceitos teóricos apresentados.

Basílio Santiago

Adriano Salviano

CAPÍTULO 1

CONCEITOS FUNDAMENTAIS E SISTEMAS DE COORDENADAS

Introdução à Astronomia Geodésica

O simples ato de olhar para o céu noturno, em uma noite sem nuvens e longe das luzes da cidade, e nele identificar o grande número de estrelas de variados brilhos e cores, se constitui em uma forma primitiva de praticar a Astronomia de Posição. Quem não teve a experiência de ver uma "estrela cadente", ou presenciar subitamente algum fenômeno no céu (passagem de um satélite, balão meteorológico ou mesmo um avião, aparente mudança de brilho de uma estrela, etc) e tentar descrever a outra pessoa em que posição do céu isso aconteceu? Em geral, para o leigo, este tipo de experiência leva ao uso das mãos: a primeira reação é apontarmos para a direção onde se deu o fenômeno. Já outras pessoas podem tentar usar estrelas vizinhas ao ponto ou região do céu em questão. O fato é que a necessidade de localizar e identificar objetos no céu acompanha a civilização humana desde o seu início.

Na Antigüidade, a identificação de estrelas específicas no céu logo ao anoitecer ou amanhecer, ou mesmo a posição do Sol no céu com relação a marcos de referência em terra eram usados para marcar a sucessão das estações de calor ou frio, de secas ou cheias. Para facilitar seu trabalho, muitos povos usavam as estrelas mais brilhantes do céu, juntamente com um pouco de imaginação, para formar figuras familiares, de animais conhecidos, figuras de sua mitologia, ou cenas cotidianas no céu noturno. Essas figuras, as constelações, já representam um avanço na prática da Astronomia de Posição. Ao invés de apontar o dedo na direção de um certo fenômeno ou objeto celeste, o reconhecimento das constelações no céu permitia localizar este fenômeno ou objeto simplesmente fazendo menção à constelação cujas estrelas o circundavam.

Apesar do apelo que têm junto às pessoas (todos nós já ouvimos falar de constelações como o Cruzeiro do Sul, Escorpião, Sagitário, Touro, etc) atualmente a Astronomia de Posição faz pouco uso delas. O motivo para o pouco uso das constelações pode ser conhecido se nos dispusermos a passar uma noite olhando para o céu e tentando identificar as constelações nele presentes com o auxílio de um mapa celeste. No mapa, as estrelas que compõem a figura de cada constelação estão ligadas por linhas, de forma que, com alguma boa vontade, podemos identificar as formas dessas figuras que lhes dão o nome. Mas ao olharmos para o céu noturno a coisa se complica e muito. O que vemos é simplesmente um monte de estrelas, algumas mais brilhantes, outras menos, algumas avermelhadas, outras azuladas ou bem brancas. Aquelas figuras marcadas na carta celeste

simplesmente não se materializam facilmente aos nossos olhos no céu acima de nós. Uma explicação para este fato poderia ser a de que as constelações que os mapas celestes descrevem até hoje são as mesmas que os gregos e romanos antigos identificaram. Figuras como o Sagitário, Centauro, Pégaso, Andrômeda, Cassiopéia, etc, fazem parte da cultura deles e não da nossa! Mas a verdade é que somente com muito treino poderíamos começar a separar a confusão de estrelas que vemos no céu em figuras distintas, mesmo que tentássemos identificar coisas bem familiares no céu, como por exemplo, o Cristo Redentor, o Pão de Açúcar, o elevador Lacerda em Salvador, o prédio do Congresso Nacional em Brasília, o mapa do Brasil, o símbolo da CBF, uma cuia de chimarrão, animais domésticos como cachorros, gatos, bois, o que for!

Atualmente, nós temos meios mais eficazes de localizar um astro no céu. Eficaz aqui significa objetivo e simples; na verdade tão objetivo e simples quanto a Matemática que aprendemos no ensino básico. A posição de um astro no céu pode ser estabelecida por meio de um sistema de coordenadas. Nas páginas que se seguem, nós vamos descrever os sistemas de coordenadas mais usados em Astronomia de Posição, em especial o Sistema Horizontal de Coordenadas e o Sistema Equatorial de Coordenadas. Estes sistemas, assim como os demais que veremos adiante, são todos de um mesmo tipo: a posição de uma estrela no céu pode ser definida pela especificação do valor de dois ângulos, um deles contado ao longo de um plano de referência, variando de 0° a 360° , e o outro contado a partir deste mesmo plano, variando de -90° a 90° . Estes sistemas são chamados de Sistemas de Coordenadas Esféricas.

Antes de introduzirmos os sistemas horizontal e equatorial de coordenadas, contudo, faz-se necessário estabelecer alguns conceitos elementares. Quando apontamos o dedo para alguma estrela, estamos escolhendo uma direção no espaço. Todos os pontos situados ao longo da reta que, partindo de nós, passa pelo nosso braço a atinge a estrela, estão na mesma direção no espaço. Mas onde ao longo desta reta está localizada a estrela? Esta pergunta é inteiramente análoga a perguntarmos "a que distância está essa estrela de nós?". Para uma estrela "próxima", o tamanho do segmento de reta que nos une a ela será menor do que no caso de uma estrela "distante". Uma mesma direção no espaço pode conter mais de uma estrela, situadas a diferentes distâncias.

O fato é que as estrelas estão tão distantes de nós que, para o efeito de sua localização no céu, podemos considerar que elas estão a uma distância infinita! O que queremos dizer com isso é que em Astronomia de Posição estamos apenas preocupados em caracterizar a direção na qual se encontram os astros. Não nos interessa aqui a sua distância, bastando para nós aceitar que esta distância é muito maior do que as distâncias com que lidamos em nossas vidas cotidianas, ou mesmo do que o tamanho da Terra. Essa conclusão nos permite definir então a esfera celeste. Trata-se de um conceito abstrato, mas muito importante: a esfera celeste nada mais é do que uma forma de atribuir uma forma material ao céu de um observador. A esfera celeste tem raio infinito e centro

no observador. Mas como seu raio é infinito, qualquer observador situado sobre a superfície da Terra pode se considerar igualmente situado em seu centro. Qualquer objeto celeste (Sol, Lua, planetas, estrelas, o que for) em um dado instante está situado em um ponto da esfera celeste. Este ponto resulta do prolongamento *ad infinitum* da direção no espaço na qual vemos o objeto.

Podemos desenhar círculos na esfera celeste. O exemplo mais fácil é o círculo do horizonte. O horizonte é um círculo sobre a esfera celeste que a divide ao meio: o hemisfério que está acima do horizonte é a parte visível da esfera celeste. Só conseguimos ver no céu os astros que estão no hemisfério visível, acima do horizonte. A metade abaixo do horizonte, obviamente, não conseguimos observar. O Sol, por exemplo, quando está acima do horizonte de um observador, ilumina tudo à sua volta, caracterizando o dia; quando o Sol está abaixo do horizonte, temos obviamente menos claridade, o que significa uma situação de noite. Aos círculos que, como o horizonte, dividem a esfera celeste ao meio chamamos de grandes círculos ou círculos máximos. Ao longo do nosso estudo, deparar-nos-emos com outros exemplos de grandes círculos como o equador celeste, o meridiano astronômico e a eclíptica. Estes serão discutidos em mais detalhe ao longo do livro, mas podemos adiantar que o primeiro divide a esfera celeste em dois hemisférios: o norte e o sul celestes. Já a eclíptica é um grande círculo no céu percorrido pelo Sol ao longo de um ano.

Na verdade, todos os pontos e círculos que definimos sobre a superfície da Terra podem ser prolongados *ad infinitum* até encontrarem a esfera celeste. Assim podemos não apenas falar de Equador celeste e de hemisférios norte e sul celestes, mas também de pólos norte e sul celestes, paralelos celestes (assim como os paralelos ao Equador da Terra) e meridianos celestes. Quanto a estes últimos, o meridiano astronômico de um observador, mencionado acima, nada mais é do que a projeção na esfera celeste do meridiano geográfico do mesmo.

Sistema Horizontal de Coordenadas

A figura I.1.1 abaixo ilustra o sistema de coordenadas horizontais. Na figura vemos a metade da Abóbada Celeste (= Esfera Celeste) visível ao observador situado em O. A posição da estrela está marcada por E. O Zênite do observador é indicado por Z. O zênite é o ponto da esfera celeste acima da cabeça do observador. De maneira mais técnica podemos defini-lo como sendo o ponto da esfera celeste que resulta da extensão *ad infinitum* da vertical do observador. Assim sendo, a direção de Z é perpendicular ao Plano Horizontal do observador, no qual se situam os pontos cardeais: Norte (N), Leste (E), Sul (S) e Oeste (W).

O plano que contém tanto os pontos cardeais N e S quanto o zênite Z é o Plano Meridiano, cuja intersecção com a Esfera Celeste define o Meridiano Astronômico do observador. Este último, por vezes chamado de Linha Meridiana, divide a esfera celeste ao meio, sendo portanto um grande círculo. Analogamente, a intersecção do plano horizontal do observador com a esfera celeste é o

horizonte do observador, novamente um círculo máximo da esfera celeste. As duas metades da esfera celeste definidas pelo horizonte são o hemisfério visível (acima do horizonte e que contém o zênite) e o hemisfério invisível (abaixo do horizonte). A figura I.1.1, como já dissemos, representa apenas a metade visível da esfera celeste. Como o meridiano astronômico não é todo disponível à observação, alguns autores preferem definir como meridiano astronômico apenas o semicírculo meridiano situado acima do horizonte. Outros fazem referência a este último como sendo o Meridiano Superior ou ainda, Semimeridiano Superior.

O plano que contém o observador O, o zênite Z e a estrela E é chamado de Vertical da Estrela. A intersecção do vertical da estrela com a esfera celeste define o Círculo Vertical da mesma.

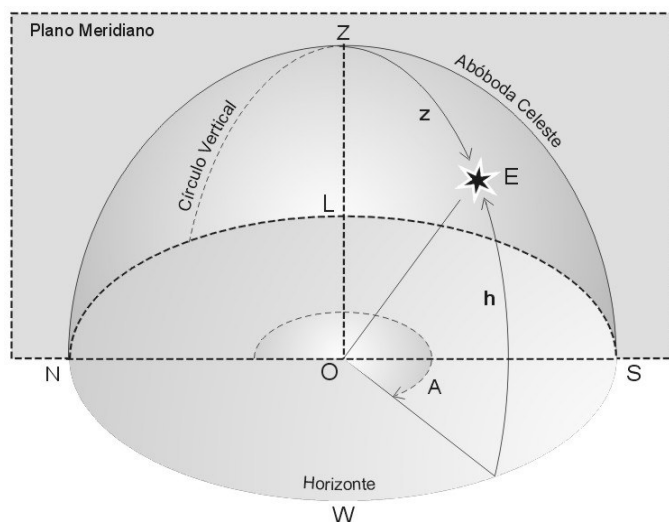


Figura I.1.1 – *Sistema de coordenadas horizontais.*

Pois bem, podemos situar qualquer ponto na esfera celeste com duas coordenadas. No caso do sistema horizontal essas coordenadas são a altura h e o azimute A . Pela figura I.1.1 vemos que a altura é o ângulo entre a direção à estrela (segmento de reta OE) e o plano do horizonte. A altura é arbitrada como sendo positiva para pontos da esfera celeste situados acima do horizonte e negativa para aqueles abaixo do horizonte. Já o azimute é o ângulo, contado ao longo do plano horizontal, entre o plano meridiano e o vertical da estrela. A origem da contagem de A (ou seja, $A = 0^\circ$) é em geral arbitrada como sendo o ponto cardeal norte (N); mas alguns autores preferem usar o ponto cardeal Sul (S). É comum também se substituir a altura h pela distância zenital z ; esta última é o ângulo entre a direção vertical (ou seja, OZ) e a direção à estrela. Fica claro, tanto pelas definições quanto pela figura, que a altura e a distância zenital são ângulos complementares, ou seja:

$$h + z = 90^\circ$$

Azimute e altura geralmente são definidos de forma que seus valores possam variar dentro dos seguintes domínios:

$$0^\circ \leq A \leq 360^\circ$$

$$-90^{\circ} \leq h \leq 90^{\circ}$$

$$0^{\circ} \leq z \leq 180^{\circ}$$

Valores negativos de altura se aplicam a objetos abaixo do horizonte, sendo $z > 90^{\circ}$ neste caso.

Para fins de fixação, procuremos agora responder às seguintes perguntas:

- 1 – Qual a altura de um objeto exatamente no horizonte do observador?
- 2 – Qual a altura de uma estrela que esteja no nadir, ou seja, no ponto da esfera celeste diametralmente oposto ao zênite?
- 3 – Qual o azimute de um astro que se situa no meridiano astronômico do observador, entre o zênite e o ponto cardinal norte?
- 4 – Qual a altura de um astro cuja distância zenital é $z = 40^{\circ}$?
- 5 – Qual o azimute de uma estrela cujo vertical contém o ponto cardinal leste (E)?

A figura I.1.2 mostra o sistema horizontal por uma outra perspectiva. No painel da direita vemos a definição da altura h do ponto de vista de alguém que se situa no plano do horizonte. Já o painel da esquerda mostra a definição do azimute A a partir de uma perspectiva de quem olha para o plano horizontal de cima, ou seja, ao longo da vertical do observador.

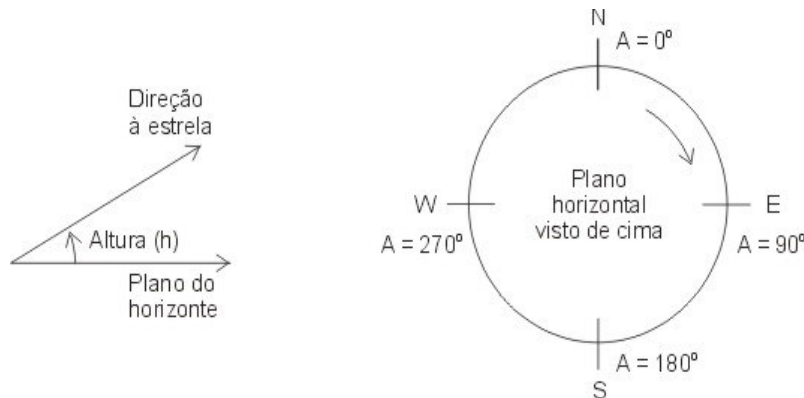


Figura I.1.2 – definição da altura h e do azimute A .

Uma observação importante sobre o sistema horizontal é que as coordenadas de um objeto mudam com o passar do tempo. É fácil constatar isso, pois sabemos que, devido à rotação da Terra, os astros se movem lentamente de leste para oeste. Ao nascer a leste do meridiano astronômico, qualquer estrela terá necessariamente um azimute no domínio $0^{\circ} \leq A \leq 180^{\circ}$. Já ao se por a oeste do meridiano do observador, seu azimute será $180^{\circ} \leq A \leq 360^{\circ}$. A altura (ou distância zenital) obviamente também varia: tanto ao subir no horizonte a leste quanto ao baixar a oeste, a altura de uma estrela é nula ($h = 0^{\circ}$). No intervalo entre estes dois instantes, o objeto obviamente está acima do horizonte e temos, portanto $h > 0^{\circ}$. Na verdade, veremos mais adiante que o movimento diurno de um astro tem a forma de um círculo na esfera celeste. Em geral, parte deste círculo está acima do

horizonte e parte abaixo dele. A figura I.1.3 ajuda a visualizar um arco diurno típico descrito por uma fonte celeste. Novamente, vemos apenas a parte do arco diurno que está acima do horizonte do observador.

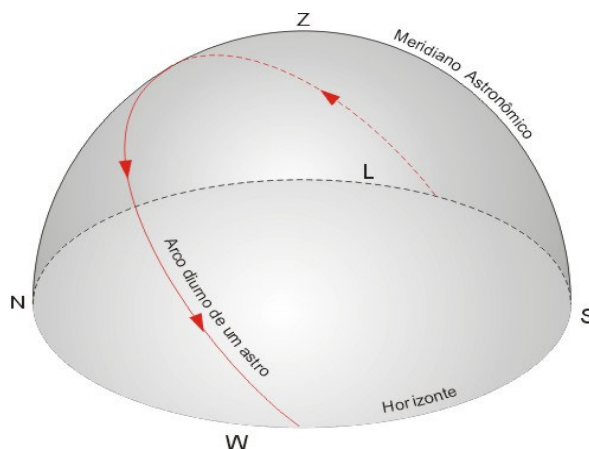


Figura I.1.3 – exemplo de arco diurno descrito por um astro.

Note que na Figura I.1.3 os pontos em que o arco diurno cruza com o horizonte não coincidem com os pontos cardeais leste (L) e oeste (W). De fato, veremos mais adiante que poucos astros nascem (se põem) exatamente em L (W).

Além de variar com o tempo, as coordenadas horizontais de uma fonte astronômica também dependem da posição do observador na superfície da Terra. O fato de esta última ser de tamanho desprezível comparada com as distâncias às fontes astronômicas implica que a direção à fonte no espaço independe da posição do observador. Por outro lado, a direção da vertical do observador claramente depende de onde na superfície da Terra ele está. A situação é retratada na figura I.1.4, que mostra dois observadores situados em um mesmo meridiano geográfico, mas em pontos distintos da superfície da Terra. A direção à estrela é a mesma independentemente do ponto de observação sobre a Terra, sendo esta direção representada pelas retas paralelas da figura. Mas as verticais dos observadores, que pode ser aproximada como a reta originada no centro da Terra e que passa pelo observador, aponta em direções diferentes. Em outras palavras, os zênites Z_1 e Z_2 dos observadores claramente correspondem a direções distintas no espaço. O plano horizontal de cada observador é perpendicular à vertical e, portanto também varia de orientação no espaço. Nota-se que a altura da estrela medida pelo observador O_1 é bem menor do que aquela medida por O_2 . Na figura, PNG e PSG correspondem aos pólos norte e sul geográficos, respectivamente.

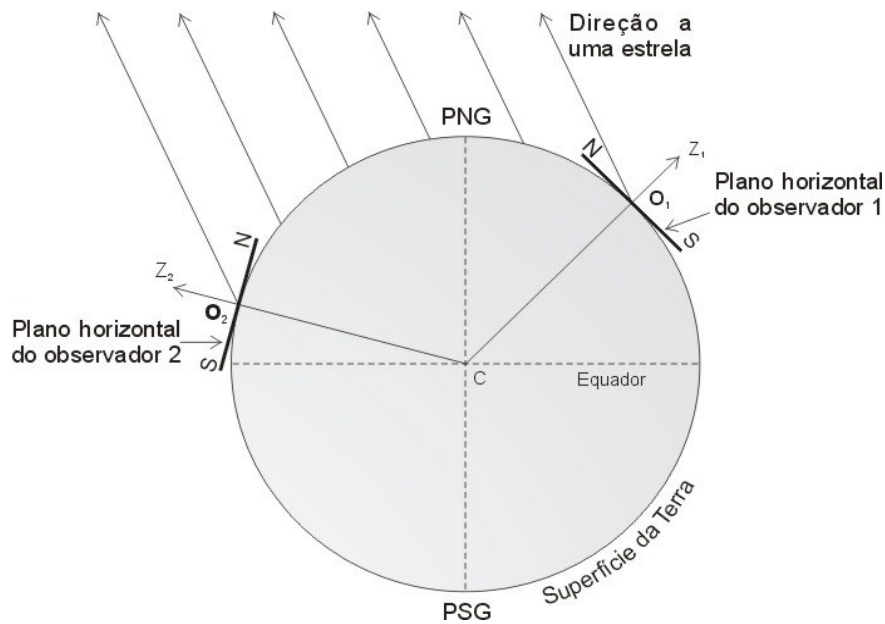


Figura I.1.4 – *Variação da direção vertical e do plano horizontal com a posição do observador na Terra*

Na próxima seção veremos um sistema de coordenadas que não depende do tempo ou da localização do observador na superfície da Terra.

Sistema Equatorial de Coordenadas

Já havíamos mencionado que os pontos e círculos que são definidos sobre a superfície da Terra têm seus equivalentes na esfera celeste. Esta situação é retratada na figura I.1.5, na qual vemos uma representação da Terra (esfera interna) e da esfera celeste (esfera externa). Note que esta última tem raio infinito, o que é obviamente impossível de reproduzir na figura. Mas o importante da figura é o fato de permitir a visualização dos equivalentes celestes ao equador e pólos geográficos. Eles são naturalmente chamados de Equador Celeste e Pólos Celestes norte e sul.

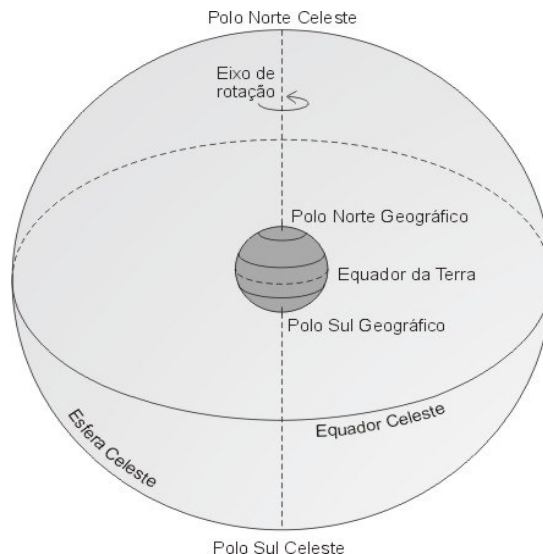


Figura I.1.5 – *Equador e pólos celestes.*

O fato de haver um único plano equatorial, reconhecido como tal por todos os observadores em Terra, independente de onde estejam na sua superfície, constitui-se na condição básica para a definição de um sistema de coordenadas que seja universal, ou seja, utilizável por todos os observadores e cujas coordenadas, para uma dada fonte, tenham o mesmo valor, independentemente de quem as mede. Este é o Sistema Equatorial (ou Uranográfico) de Coordenadas. Este sistema de coordenadas vem sendo usado desde que os primeiros catálogos de estrelas foram criados.

O sistema equatorial de coordenadas, assim como o horizontal, é também baseado em dois ângulos: a Ascensão Reta α e a Declinação δ . Outra semelhança entre os dois sistemas é o fato de ambos serem definidos a partir de um plano de referência. No sistema horizontal este plano é o Plano Horizontal do observador. No sistema equatorial, como novamente implícito pelo próprio nome, o plano de referência é o plano que contém o equador da Terra e o equador celeste, ou Plano Equatorial. Na verdade, um observador atento vai notar que há uma enorme semelhança formal entre os sistemas horizontal e equatorial.

Na figura I.1.6 abaixo vemos uma representação gráfica do sistema equatorial, onde T é o observador e E é uma estrela. Também indicamos a posição do Pólo Norte Celeste (PNC). O plano perpendicular à direção deste último e que contém o observador é o plano equatorial. A intersecção entre o plano equatorial e a esfera celeste é o grande círculo chamado de Equador Celeste.

A declinação δ é definida como o ângulo entre o plano equatorial e a direção à estrela (segmento TE da figura). Analogamente ao caso horizontal, o sinal de δ caracteriza os pontos dos diferentes hemisférios separados pelo plano de referência: $\delta > 0^\circ$ ($\delta < 0^\circ$) corresponde a pontos a norte (sul) do equador celeste. Uma estrela sobre o equador celeste tem declinação $\delta = 0^\circ$. Já o conjunto de todos os pontos cuja declinação é constante é chamado de Paralelo Celeste ou Paralelo de Declinação. O complemento da declinação, representado pelo ângulo p na figura, se chama Distância Polar, sendo, como implica o próprio termo, o ângulo entre a direção à estrela e a direção ao pólo norte celeste (segmento de reta T–PNC). A distância polar desempenha, no sistema equatorial, o mesmo papel que a distância zenital no caso das coordenadas horizontais. Podemos então escrever:

$$\delta + p = 90^\circ$$

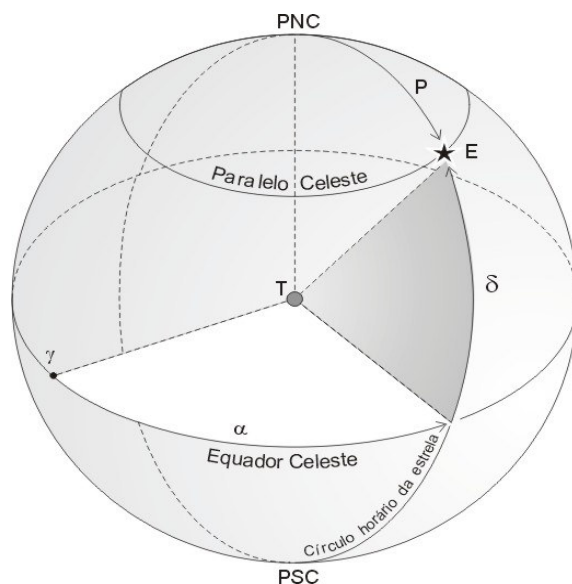


Figura I.1.6 – Sistema de coordenadas equatoriais.

Já a ascensão reta, analogamente ao azimute no sistema horizontal, é contada ao longo do plano de referência. Logo a origem da contagem da ascensão reta ($\alpha = 0^\circ$) é necessariamente um ponto sobre o equador celeste. Este ponto é representado por γ na figura I.1.6. O ponto γ (ou Ponto Vernal ou ainda Ponto de Áries) é um dos dois pontos da esfera celeste que pertence tanto ao equador celeste quanto à eclíptica (ver seção sobre movimento anual do Sol). A ascensão reta é definida como o ângulo entre o plano que contém PNC, T e γ e o plano que contém PNC, T e a estrela E (ver figura I.1.6). A intersecção deste último (primeiro) plano com a esfera celeste define um grande círculo chamado de círculo horário da estrela (do ponto vernal). Os pontos sobre o círculo horário da estrela têm o mesmo valor de α . Vemos pela figura que a ascensão reta é contada para leste e pode assumir valores entre $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. É comum, no entanto, exprimirmos a ascensão reta em unidades de tempo. Se atribuirmos um domínio de 24h ao domínio de valores de α acima, teremos $1h = 15^\circ$. Por exemplo, os pontos sobre o círculo horário do ponto γ têm $\alpha = 0^\circ = 0h$. Esta relação entre ascensão reta e tempo ficará mais nítida adiante, quando discutirmos o conceito de ângulo horário e as diferentes definições de sistemas de tempo.

Ângulo horário

Ângulo horário H de um astro é o ângulo entre o círculo horário deste astro e o meridiano astronômico do observador. Este ângulo, assim como a ascensão reta, também é contado sobre o equador celeste, variando de $0^\circ \leq H \leq 360^\circ$. A figura I.1.7 é muito semelhante à figura I.1.6. A diferença é a inclusão do meridiano astronômico do observador na figura. Conforme explicado anteriormente, o meridiano é o grande círculo no céu que contém o zênite e os pontos cardeais norte

e sul. O meridiano necessariamente contém também os pólos celestes norte e sul. Na figura vemos que o ângulo horário cresce, a partir do meridiano, em direção oposta à ascensão reta. H cresce para oeste, acompanhando o movimento diurno dos astros (de leste para oeste). Já α cresce para leste, seguindo o movimento anual do Sol. Note que enquanto a ascensão reta α e a declinação δ formam o sistema de coordenadas equatoriais ou uranográficas, o ângulo horário H , juntamente com a declinação δ forma o sistema horário de coordenadas.

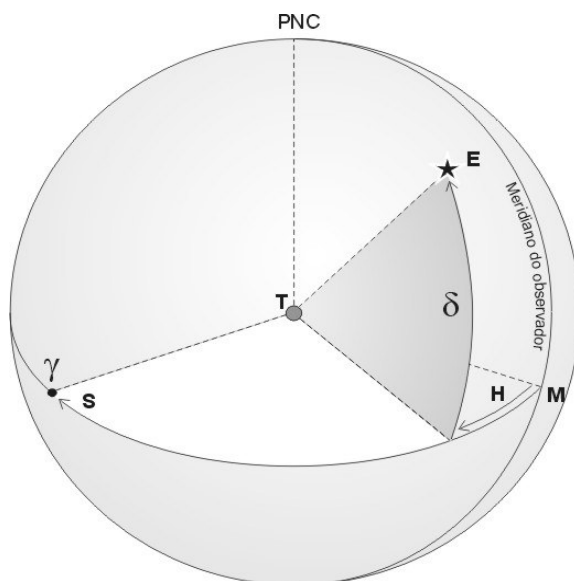


Figura I.1.7 – Sistema horário de coordenadas.

É precisamente o fato de acompanhar o movimento diurno dos astros que torna H um indicador útil para contagem de tempo. Por exemplo, se num dado instante uma estrela está no meridiano astronômico de um observador, seu ângulo horário é $H = 0^\circ$. Um dia depois, após a Terra dar um giro completo em torno de seu eixo, a estrela estará novamente passando pelo meridiano do observador. Durante estas duas passagens meridianas, o ângulo horário da estrela terá variado de 0° a 360° . Podemos, portanto, definir a hora do dia com base no ângulo horário do astro. Daí o nome!

A verdade é que o céu é um imenso relógio, do qual os astros são os ponteiros. A partir da posição destes ponteiros podemos então obter uma medida da hora. Por exemplo, define-se Hora Sideral (S) como sendo simplesmente o ângulo horário do ponto vernal (ponto γ). Pela figura I.1.7, vemos então que:

$$S = H_\gamma = H_* + \alpha_*$$

onde H_* e α_* se referem a uma estrela qualquer.

Podemos então definir como Dia Sideral o intervalo de tempo necessário para que o ponto vernal passe duas vezes pelo meridiano de um observador qualquer. Em outras palavras, é o intervalo decorrido entre duas passagens meridianas do Ponto γ .

Podemos também usar o ângulo horário do Sol como indicador da hora. Uma vantagem óbvia de fazê-lo reside no fato de que o Sol é facilmente localizável no céu, o mesmo não se aplicando ao ponto vernal. A Hora Solar (M) é então dada pela expressão:

$$M = H_{\text{sol}} + 12\text{h}$$

onde H_{sol} é o ângulo horário do Sol em um dado instante. O acréscimo de 12h serve simplesmente para fazer com que a passagem meridiana do Sol ($H_{\text{sol}} = 0\text{h}$) corresponda ao meio-dia ($M = 12\text{h}$) e não à meia-noite. Novamente podemos falar de dia solar como sendo o intervalo de tempo decorrido entre duas passagens consecutivas do Sol pelo meridiano de um observador.

Por estar a Terra orbitando em torno do Sol ao mesmo tempo em que gira em torno de seu eixo de rotação, os dias solar e sideral não têm a mesma duração. Como o sentido de ambos os movimentos é o mesmo (anti-horário se visto do norte e horário se olhamos do sul) é fácil provar que o dia solar é um pouco mais longo do que sideral:

$$\text{Dia solar} = 24\text{h solares.}$$

$$\text{Dia sideral} = 24\text{h siderais} = 23\text{h } 56\text{min } 04\text{s solares.}$$

Mais adiante, no Capítulo 3, voltaremos a discutir, em mais detalhe, os sistemas de marcação de tempo usados em Astronomia.

Para fins de fixação, veja se consegue responder as perguntas abaixo.

1) Qual o valor de declinação do Pólo Sul Celeste? E qual o valor de δ para o Pólo Norte Celeste?

2) Qual o valor de α de um ponto cujo círculo horário faz um ângulo de 180° com o círculo horário do ponto vernal?

3) Qual o valor de δ de uma estrela situada 45° a sul do equador celeste?

4) Seja um observador situado no pólo norte geográfico da Terra. Que ponto de referência do sistema equatorial se situa no zênite deste observador? Qual a declinação de um ponto cuja distância zenital medida por este observador é 30° ?

5) Qual o valor de distância polar de uma estrela de declinação $\delta = 20^\circ$? E de uma estrela com $\delta = -50^\circ$?

Precessão

Finalmente, cumpre mencionar que o eixo de rotação da Terra muda de direção no espaço. Por conseguinte, mudam no céu as posições dos pólos celestes, do equador celeste e do ponto vernal. A este movimento chamamos de precessão do eixo (ou precessão dos equinócios). Como as coordenadas equatoriais são definidas a partir destes pontos e círculos da esfera celeste, elas também variam com o tempo. Fórmulas para calcular as coordenadas equatoriais de um astro em diferentes épocas são dadas pelo *Astronomical Almanac*. Essas fórmulas são muito úteis, pois os catálogos astronômicos geralmente listam as coordenadas das estrelas para uma época arredondada,

como 1950 ou 2000. Se quisermos localizar com precisão um objeto no céu em uma época arbitrária, teremos necessariamente que corrigir as coordenadas catalogadas para a precessão.

A precessão do eixo é muito lenta. De maneira aproximada, a variação de α é da ordem de 3s por ano e a de δ de uns 20"/ano. A figura I.1.8 mostra a variação da posição dos pólos celestes devida à precessão. A figura da esquerda mostra a situação no presente, em que o pólo norte celeste (PNC) coincide aproximadamente com a estrela *Polaris*. Daqui a milhares de anos, o pólo celeste norte coincidirá aproximadamente com a estrela *Vega* (figura da direita). No Capítulo 4 discutiremos com mais profundidade a precessão do eixo, bem como outros movimentos que levam a variações nas coordenadas equatoriais das estrelas.

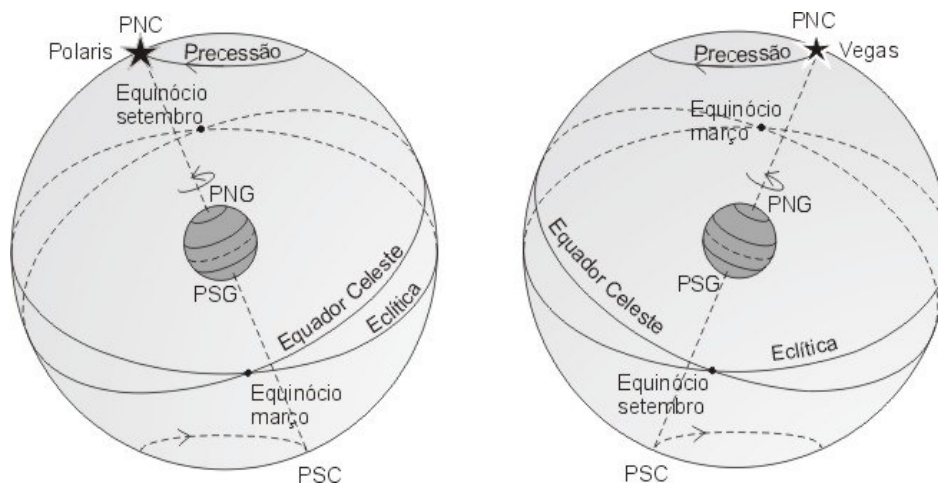


Figura I.1.8 – *Precessão do eixo de rotação terrestre.*

Relação entre os Sistemas Horizontal e Equatorial de Coordenadas

Vimos que o sistema de coordenadas horizontais ou altazimutais é baseado no plano do horizonte e na vertical do observador. Por serem a horizontal e a vertical fáceis de localizar, este sistema de coordenadas é o mais fácil de se visualizar e suas coordenadas são mais diretamente mensuráveis. É também mais fácil montar um teodolito ou telescópio de forma que ele se mova horizontal e verticalmente. Portanto, quase todos os instrumentos de medida astronômica têm montagem altazimutal.

Por outro lado, vimos que, contrariamente às coordenadas equatoriais, as coordenadas horizontais de um astro mudam com a posição do observador e com a hora do dia. Isso porque o sistema equatorial é baseado em pontos e círculos que são universalmente reconhecidos por qualquer observador na superfície da Terra. Já conceitos como o plano horizontal e direção vertical são relativos. Computadores podem ser programados para transformar coordenadas de um sistema para outro. Essas transformações podem ser deduzidas usando-se fórmulas de trigonometria esférica. Como as coordenadas horizontais variam rapidamente com o tempo, e também dependem

de onde se encontra o observador, essas transformações também envolvem coordenadas temporais, como o ângulo horário, e a latitude do observador, ϕ .

A Trigonometria Esférica será discutida no Capítulo 2. Uma compilação mais extensa de fórmulas de Trigonometria Esférica pode ser obtida no livro *Conceitos de Astronomia*, de R. Boczko. Outra boa compilação pode ser obtida em *Astrophysical Formulae*, de K. Lang, p. 504.

Uma dificuldade comum consiste em sermos capazes de visualizar, ao mesmo tempo, os pontos e círculos pertinentes tanto ao sistema horizontal quanto ao sistema equatorial de referência. Tentamos fazer isso na figura I.1.9. A figura mostra o plano que contém o meridiano geográfico de observadores situados nos pontos O_1 e O_2 sobre a superfície da Terra. São indicados o eixo de rotação da Terra, ligando os pólos geográficos norte (PNG) e sul (PSG), bem como o Equador geográfico. Sabemos pela figura I.1.5 que o prolongamento do eixo de rotação leva aos pólos celestes e que a projeção do Equador define o seu correspondente celeste.

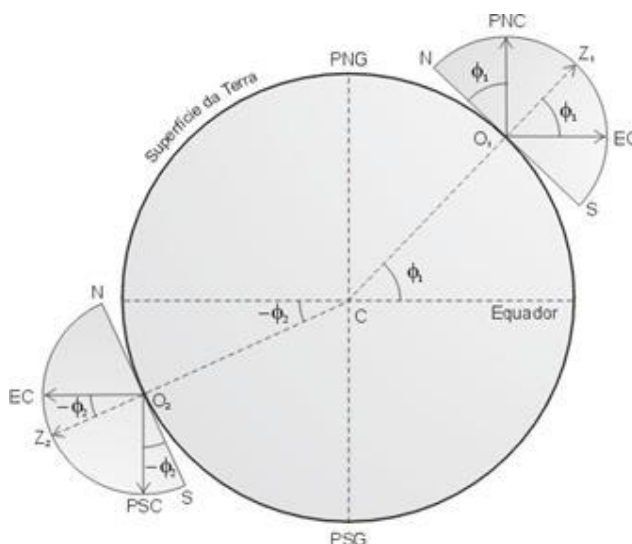


Figura I.1.9 – Pontos e círculos de referência aos Sistemas Horizontal e Equatorial de coordenadas.

O plano horizontal do observador em O_1 , assumindo-se a Terra como esférica e de densidade uniforme, é simplesmente o plano tangente à superfície da Terra em O_1 , tal como indicado. Já a vertical do observador será o prolongamento da reta que liga o centro do planeta (C) ao observador, apontando na direção do zênite (Z_1). O ângulo entre esta reta e o plano equatorial é, por definição, a latitude (ϕ) de O_1 . Como a vertical é perpendicular à horizontal, o mesmo acontecendo com a direção dos pólos celestes com relação ao equador celeste, fica evidente pela figura que a altura do pólo celeste visível do observador (no caso de O_1 na figura é o pólo celeste norte, PNC) é igual à latitude do observador. Note que para O_1 o pólo elevado (acima do horizonte) é o celeste norte, enquanto que para O_2 , por situar-se a sul do equador da Terra, o pólo celeste

elevado é o sul. Para O_2 , portanto, a igualdade entre a altura do pólo elevado e a latitude é uma igualdade em módulo, com sinais algébricos opostos.

Outros sistemas de coordenadas

Coordenadas Eclípticas

Este é um sistema cujo plano de referência é o da eclíptica, ou seja, o plano que contém o caminho descrito pelo Sol no céu ao longo de um ano. Este sistema é usado com frequência em Astronáutica, por exemplo, para expressar e manter a posição e orientação de uma nave com relação ao Sol. Latitude e Longitude Eclípticas são usualmente expressas em graus e são mais comumente usadas em Astronomia do Sistema Solar. A primeira (β) é a altura do astro com relação ao plano da eclíptica (ver figura I.1.10 abaixo). Já a longitude eclíptica (L) é contada ao longo deste plano, com origem no ponto γ . Transformações entre este sistema e os demais podem ser encontradas em *Conceitos de Astronomia*, de R. Boczko ou em *Astrophysical Formulae*, de K. Lang, p. 504.

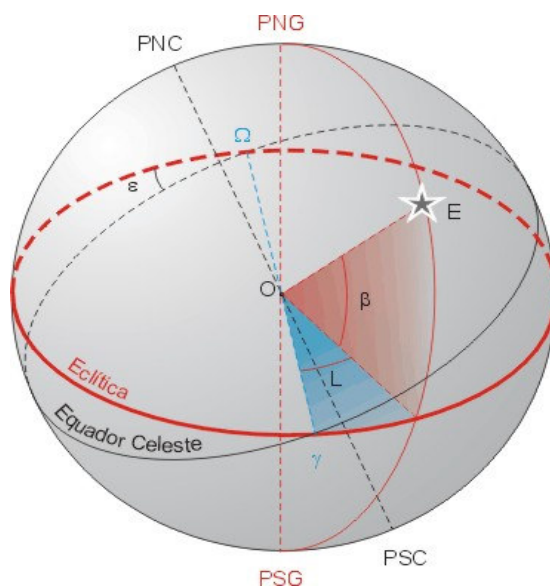


Figura I.1.10 – Sistema de Coordenadas Eclípticas

Coordenadas Galácticas

Mais um sistema de coordenadas esféricas, análogo aos demais. Ele é representado na figura I.1.11. Desta vez o plano de referência é o plano do disco da Via-Láctea, a galáxia a que pertence o nosso Sistema Solar. Este plano faz um ângulo de $62^{\circ}32'$ com o plano equatorial. A Longitude Galáctica (l), contada ao longo do plano do disco, tem origem na direção ao centro da Galáxia. Note que é difícil definir o centro da Via-Láctea, o que torna este sistema sujeito a revisões mais frequentes do que os anteriores. A Latitude Galáctica é usualmente denotada pela letra b , podendo, assim como a declinação, a altura e a latitude eclíptica, assumir valores entre $-90^{\circ} < b < 90^{\circ}$. A direção ao centro da Galáxia (ou seja, $l = 0^{\circ}$ e $b = 0^{\circ}$) situa-se na constelação de Sagitário, ao passo

que o pólo norte galáctico (ou seja, $b = +90^\circ$) fica na constelação da Cabeleira de Berenice. Este sistema de coordenadas é mais aplicado em estudos que envolvem a distribuição de objetos dentro da Via-Láctea. Consulte o livro do Lang para ver transformações entre este sistema e o equatorial.

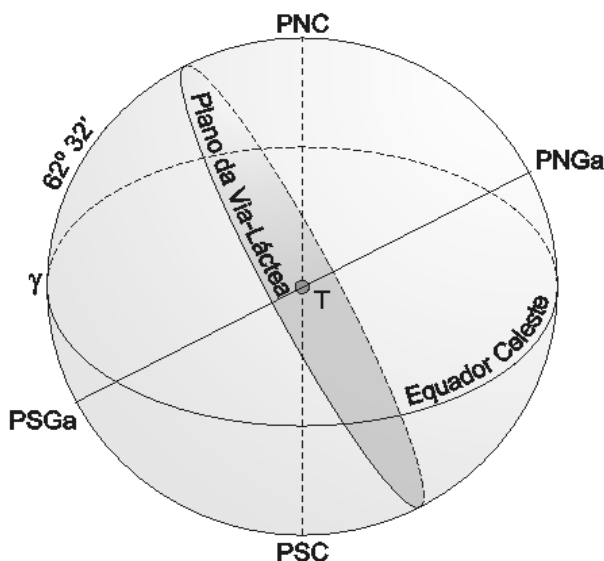


Figura I.1.11 – Sistema de Coordenadas Galácticas.

Fundamentos de Geodésia

História da Geodésia

Nós temos, por séculos, nos preocupado com a Terra sobre a qual vivemos. Em passado remoto, esta preocupação se limitava a mapear a vizinhança imediata de nossas casas; com o tempo, foi se tornando útil, e mesmo necessário, localizar e mapear outras regiões, para fins de rotas comerciais e de exploração. Finalmente, com o aumento da capacidade de se transportar a grandes distâncias, surgiu o interesse em se estabelecer a forma, o tamanho e composição de todo o planeta.

Os gregos dos períodos arcaico e clássico tiveram idéias variadas quanto à forma e tamanho da Terra. Homero sugeriu uma forma de um disco plano; Pitágoras e Aristóteles advogavam uma forma esférica. Pitágoras era um matemático que considerava a esfera a figura geométrica mais perfeita, sendo para ele, portanto, natural que os deuses dessem esta forma ao mundo. Já Anaxímenes acreditava que a Terra tinha uma forma retangular.

A idéia de uma Terra esférica foi predominante entre os gregos. A tarefa seguinte e que ocupou muitas mentes foi a de determinar seu tamanho. Platão estimou a circunferência da Terra como sendo de umas 40.000 milhas. Arquimedes estimou em 30.000 milhas. Estes valores, contudo, não passavam muito do campo da mera especulação. Coube a Erastóstenes, no século II a.C., determinar o tamanho da Terra usando medidas objetivas.

Ele notou que no dia do solstício de verão os raios solares atingiam o fundo de um poço em Siena (atual Assuan, no Egito) ao meio dia. No mesmo instante, contudo, o Sol não estava exatamente no zênite na cidade de Alexandria, a norte de Siena; pelo tamanho da sombra que o Sol projetava, Erastóstenes determinou o ângulo de incidência dos raios solares: $7^{\circ} 12'$, correspondendo a $1/50$ de um círculo. Conhecido o arco de circunferência entre as duas cidades, ou seja, a distância entre elas, Erastóstenes pode então estimar a circunferência do globo. A distância era de umas 500 milhas (na direção norte-sul). Se essa distância corresponde a $1/50$ da circunferência da Terra, esta deveria ter então $50 \times 500 = 25.000$ milhas de circunferência. Este é um valor bastante próximo do raio equatorial terrestre (24.901 milhas, valor adotado no *World Geodetic System*). A figura I.1.12 ilustra o método usado por Erastóstenes. Nela vemos raios solares paralelos incidindo sobre as duas cidades, sendo que em Alexandria o ângulo com relação à vertical não é nulo, mas de $7^{\circ} 12'$.

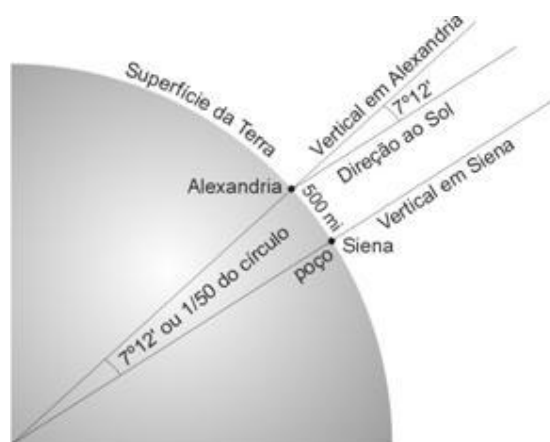


Figura I.1.12 – método de Erastóstenes para medir a circunferência da Terra.

A precisão de medida de Erastóstenes é incrível considerando-se todas as aproximações embutidas no seu cálculo. Siena na verdade não está exatamente no trópico de Câncer (ou seja, os raios solares não são estritamente perpendiculares à superfície no solstício de verão), sua distância a Alexandria é de 453 milhas (ao invés de 500 milhas) e as duas cidades não estão alinhadas na direção norte-sul; todos estes fatores contribuem para diminuir a precisão da medida.

Outro Grego antigo a estimar o tamanho do globo foi Posidônio. Ele utilizou uma estrela que era circumpolar, ou seja, que estava sempre acima do horizonte, quando vista da cidade de Rodes, tangenciando o horizonte no instante da culminação inferior (ver Capítulo 2). Esta mesma estrela teve então sua altura medida em Alexandria e, conhecida, a distância entre as duas cidades, foi possível a Posidônio determinar um valor de 24.000 milhas para a circunferência da Terra. Outro filósofo grego revisou o método de Posidônio e encontrou um valor substancialmente menor: 18.000 milhas. Este valor foi o adotado por Ptolomeu, cujo trabalho e modelo de cosmos foi adotado na Europa ao longo da Idade Média. Foi possivelmente graças a esta subestimativa da circunferência do globo que Cristóvão Colombo foi levado a crer que o Extremo Oriente estaria a

apenas umas 3 ou 4 mil milhas a oeste da Europa. Somente no século 15 que o valor aceito por Ptolomeu foi revisado pelo cartógrafo finlandês Mercator.

O advento do telescópio, de tabelas logarítmicas e do método da triangulação foram contribuições do século 17 à ciência da Geodésia. Nesta época, o Francês Picard fez medidas de arcos que podem ser consideradas modernas. Ele mediu uma linha de base usando traves de madeira e um telescópio para medir ângulos. Cassini posteriormente estendeu o método de Picard, fazendo medidas de linhas de base maiores e tanto a sul quanto a norte de Paris. Quando computou o comprimento das linhas de base equivalentes a um ângulo de 1° , Cassini notou que estas eram maiores na direção sul do que no norte. Tal resultado foi o primeiro indício de um desvio da forma da Terra com relação a uma esfera.

A figura da Terra

A expressão “figura da Terra” tem significados diversos em Geodésia de acordo com o contexto e com o grau de precisão com que se deseja definir a tamanho e a forma do planeta. A verdadeira superfície topográfica é bem diversificada, com sua variedade de formações de solo e áreas líquidas. É nessa superfície, na verdade, que as medidas são feitas. Ela não é, contudo, adequada para cálculos matemáticos exatos, pois as fórmulas necessárias para acomodar as irregularidades exigiriam uma quantidade proibitiva de parâmetros e cálculos. A superfície topográfica é, em geral, preocupação de topógrafos e de hidrógrafos.

O conceito esférico de Pitágoras oferece uma superfície simples e fácil de se lidar matematicamente. Muitos cálculos astronômicos e de navegação fazem uso desta representação da superfície da Terra. Ainda que uma esfera seja uma aproximação fiel e satisfatória em muitos casos, para geodestas interessados em medidas de grandes distâncias, envolvendo continentes e oceanos, uma figura mais exata se faz necessária. A idéia de uma superfície plana, por outro lado, ainda é aceitável em pesquisas sobre pequenas áreas. Modelos planos são usados em pesquisas em área relativamente pequenas, sem nenhuma correção para a curvatura da Terra. Um levantamento de uma cidade, por exemplo, provavelmente seria levado a cabo desprezando-se tal curvatura. Para áreas pequenas assim, posições relativas entre pontos podem ser determinadas com exatidão sem considerar-se o tamanho e a forma do planeta.

O Elipsóide de Revolução

Dado que a Terra é ligeiramente achatada nos pólos e se alarga mais no equador, a figura geométrica regular usada em Geodésia e que mais se aproxima de sua verdadeira forma é o elipsóide de revolução. O elipsóide de revolução é a figura que se obtém ao se rodar uma elipse em torno de seu eixo menor. A figura I.1.13 mostra uma elipse e seus principais elementos.

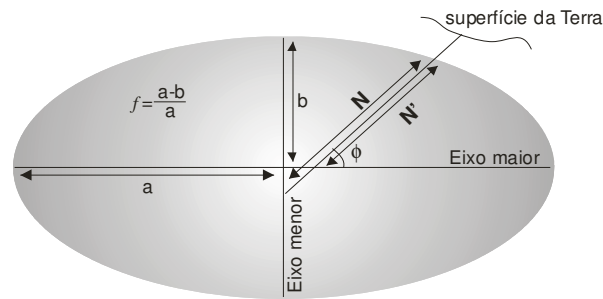


Figura I.1.13– Semi-eixos maior a e menor b , grande normal (N) e pequena Normal N' .

Caracterizados pelo semi-eixo maior a (raio equatorial), semi-eixo menor b (raio polar), achatamento (f) e excentricidade (e). Onde:

- Achatamento (f): $f = \frac{a-b}{a}$;
- Semi-eixo maior ou raio equatorial do Elipsóide (a);
- Semi-eixo menor ou raio polar do Elipsóide (b);
- Excentricidade (e): $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{2f - f^2}$

E as referencias ao ponto em estudo:

- $\bar{N}$ = Grande normal, contado perpendicularmente da superfície do elipsóide até o eixo menor;
- $\bar{N}'$ = Pequena normal, contado perpendicularmente da superfície do elipsóide até o eixo maior.

Note que $\bar{N}$ e $\bar{N}'$ são diferentes da Normal (N) que é a altura geoidal ou ondulação geoidal, contado da superfície do elipsóide até a superfície do nível médio dos mares como se não houvesse os continentes, superfície esta conhecida como Geóide explicado a seguir. $\bar{N}$ e $\bar{N}'$ não se originam do centro do elipsóide mas pela perpendicularidade a superfície do elipsóide, no entanto, $\bar{N}$ e $\bar{N}'$ passam pelo centro de gravidade da terra quando o ponto em estudo está sobre o plano equatorial ou no eixo menor.

Um elipsóide de revolução é univocamente determinado pela especificação de dois parâmetros. Geodestas, por convenção, usam o semi-eixo maior e o achatamento. No caso da Terra, o tamanho da figura é determinada pelo raio do equador, o semi-eixo maior, representado pela letra a . A forma do elipsóide é definida pelo achatamento, f , que indica o quanto o elipsóide se aproxima de uma esfera. A diferença entre um elipsóide de revolução que represente a Terra e uma esfera é bem pequena. Isso é demonstrado pela figura I.1.14, onde vemos várias elipses, com diferentes valores de achatamento, sendo o maior deles igual a $f = 0,5$ e o menor $f = 1/50 = 0,02$. O valor no caso da Terra é ainda bem menor: $f = 1/300 = 0,00333$.

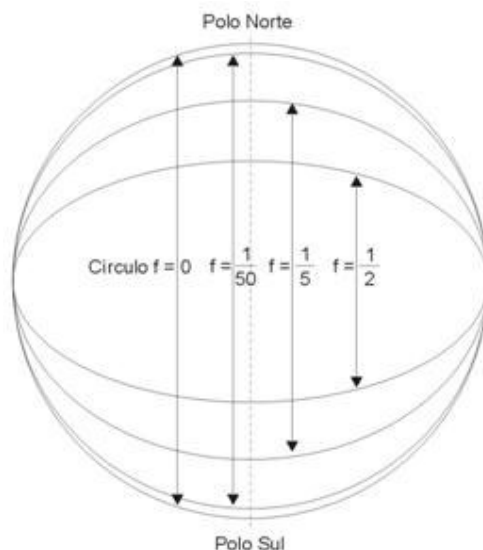


Figura I.1.14 – *elipses com diferentes achatamentos.*

Geóide

Sabemos que as medidas em Geodésia são feitas sobre a superfície aparente ou topográfica da Terra e que os cálculos teóricos assumem um modelo, geralmente elipsoidal. Há uma outra superfície também envolvida nos cálculos: O Geóide. Em levantamentos geodésicos, a computação das coordenadas geodésicas de pontos é feita em um elipsóide que aproxima com precisão o tamanho e a forma da Terra na região considerada. As medidas, por seu turno, feitas na superfície da Terra com determinados instrumentos se referem ao geóide, tal como explicado abaixo. O elipsóide é uma superfície regular definida matematicamente e com dimensões especificadas. O geóide, por seu turno, coincide com a superfície média que os oceanos descreveriam se fossem livres para se ajustar ao efeito combinado da atração gravitacional causada pela distribuição de massa da Terra e pela força centrífuga resultante de sua rotação. Devido à distribuição irregular da massa da Terra, a superfície do geóide é irregular e, como o elipsóide é regular, essas superfícies não são coincidentes. As diferenças são usualmente chamadas de ondulações geoidais, alturas geoidais ou separações geoidais.

O geóide é uma superfície ao longo da qual o potencial gravitacional é em todo lugar igual (ou seja, é uma superfície de isopotencial). Assim, a aceleração gravitacional é sempre perpendicular à superfície geoidal. Esta última característica é particularmente importante, pois instrumentos óticos que contêm mecanismos de nivelamento são comumente usados em medições geodésicas. Quando ajustadas de maneira apropriada, o eixo vertical do instrumento coincide com a direção da gravidade e é, por conseguinte, perpendicular ao geóide. O ângulo entre a linha de prumo que é perpendicular ao geóide (por vezes chamada simplesmente de vertical) e a perpendicular ao elipsóide (por vezes chamada de normal) é definida como o desvio da vertical.

Na figura I.1.15 vemos representada a superfície da Terra, com seu relevo irregular, um elipsóide que lhe serve de modelo e o geóide. Vemos também as perpendiculares ao elipsóide e ao geóide, e a medida do desvio, ou deflexão, da vertical mais exatamente pela sua componente meridiana ξ .



Figura I.1.15 – Representações da superfície da Terra: o elipsóide de revolução e o geóide, com suas respectivas perpendiculares em um dado ponto.

Sistema Geodésico de Referência

Sistema Geodésico de Referência (SGR) é o elipsóide de revolução, acompanhando nosso planeta em seu movimento de rotação adequando-se à representação dos pontos terrestre. Podem ser geocêntricos conforme a origem do terno cartesiano coincida com o centro de gravidade da Terra ou topocêntrico quando o elipsóide de revolução geocêntrico translada até um ponto da superfície do elipsóide tangenciar um ponto do Geóide.

É definido pelo:

- Eixo Z coincidente com o eixo de rotação terrestre médio, sentido positivo para o CTP (*Conventional International Pole* – Pólo Terrestre Convencional);
- Eixo X no plano do equador terrestre médio, e paralelo ao plano do Meridiano de Greenwich;
- Eixo Y a 90° de X, de modo a tornar o sistema dextrógiro.

Caracterizado por cinco parâmetros:

- Dois parâmetros definidores do elipsóide de referência:
 - Semi-eixo maior a ;
 - Achatamento f .

- Três parâmetros definidores da orientação desse elipsóide em relação ao corpo terrestre:
 - Latitude Geodésica ϕ é o ângulo que a normal do elipsóide, passante pelo ponto, forma com a sua projeção equatorial;
 - Longitude geodésica λ é o ângulo λ que mede o diedro formado pelos meridianos geodésicos do ponto considerado e de Greenwich, contada a partir deste, positivamente por leste;
 - Altura Geométrica h é o segmento da normal compreendido entre o ponto considerado e o elipsóide. Em primeira aproximação por não serem h e a altitude ortométrica H (altura em relação ao geóide) colineares.

ou

Três Coordenadas Cartesianas terrestres médias do Centro do Elipsóide (X_0, Y_0, Z_0).

Na figura 1.1.16, podemos observar as coordenadas geodésicas, cartesianas e as alturas elipsoidal, ortométrica e Normal, assim definido:

$$\begin{aligned} h &= \overline{PB} && \text{– altura elipsoidal;} \\ H &= \overline{PA} && \text{– altitude ortométrica;} \\ N &= \overline{AB} && \text{– Normal.} \end{aligned}$$

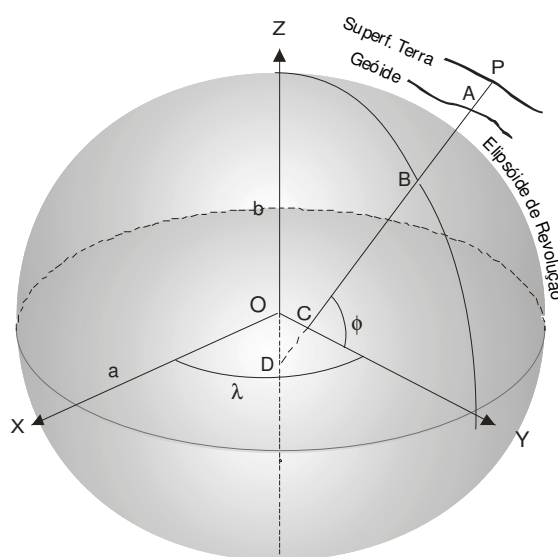


Figura I.1.16 – Coordenadas Geodésicas e Cartesianas no elipsóide de revolução e as superfícies do Geóide e da Terra.

As coordenadas astronômicas de um ponto na superfície da Terra diferem-se das coordenadas geodésicas com relação a altura, a primeira se refere a altitude ortométrica e a segunda a altura elipsoidal, devido a direção da vertical (levantadas para as coordenadas astronômicas através de transporte da diferença de nível em relação ao *datum* vertical) diferir da direção da altura

geométrica (levantadas para coordenadas geodésicas, atualmente, pela utilização da técnica de posicionamento através do sistema de satélites GPS – *Global Position System*, Sistema de Posicionamento Global). Mas as coordenadas planimétricas tem o mesmo valor com determinado grau de acurácia, pois é sabido que os levantamentos para coordenadas geodésicas são mais consistentes que os levantamentos para coordenadas astronômicas devido a técnica de posicionamento por GPS.

Um estudo interessante, não se referindo ao caso acima, se faz na vinculação das coordenadas geodésicas e astronômicas do Sistema Geodésico de Referência Topocêntrico no ponto de tangência do elipsóide transladado e o Geóide, definido por *Datum* Horizontal visto na figura I.1.17. Neste ponto se confundem a Normal e a Vertical, com as conseqüentes igualdades das coordenadas geodésicas e astronômicas. No entanto, as direções da Normal e a Vertical não são paralelas, gerando três parâmetros:

ξ – componente meridiana do desvio da vertical;

η – componente 1ª vertical do desvio da vertical e;

N – ondulação do geóide no *Datum* horizontal, distância entre a superfície do elipsóide e o Geóide.

Pode-se, então, relacionar as coordenadas geodésicas com as astronômicas:

$$\phi = \phi^a + \xi$$

$$\lambda = \lambda^a - \frac{\eta}{\cos(\phi)}$$

$$h \cong H$$

Onde ϕ^a e λ^a são respectivamente as coordenadas de latitude e longitude astronômica no *Datum* e H é a altitude ortométrica.

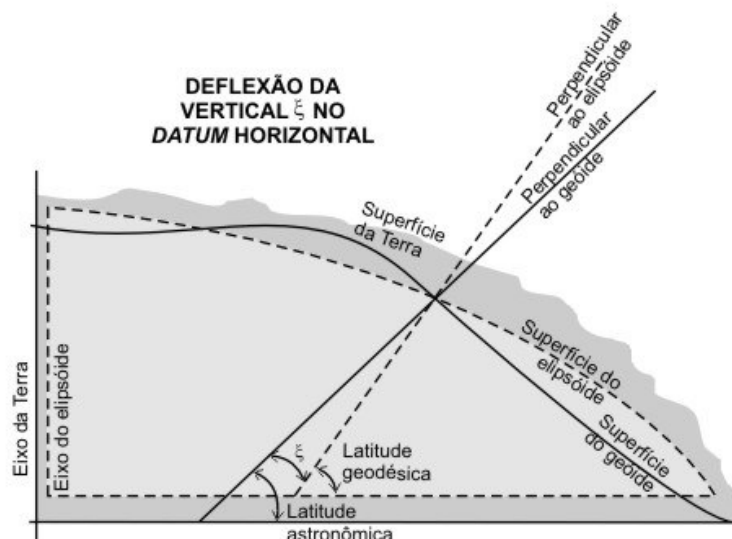


Figura I.1.17 – Deflexão da vertical no datum horizontal.

O Sistema Geodésico de Referência Topocêntrico, pertence ao sistema clássico de referenciamento utilizado em vários países, inclusive no Brasil onde é conhecido por SAD69, por apresentar os *data* horizontal (vértice Chuá) e vertical (Imbituba) e a rede de referência constituída pelas estações monumentadas, as quais representam a realização física do sistema. No entanto, no Brasil está em curso a migração do Sistema Topocêntrico SAD69 para o Sistema Geocêntrico SIRGAS (Sistema de Referência Geocêntrico para a América do Sul). Os dois Sistemas podem ser visto na figura 1.1.18.

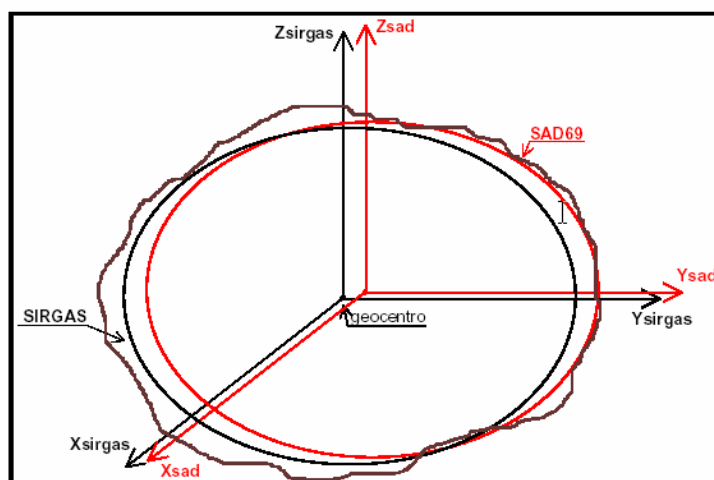


Figura I.1.18 – Elipsóides de SGR local e geocêntrico – neste caso o SAD69 e SIRGAS.

Determinação de Posição pela Astronomia

A posição de um ponto sobre a Terra pode ser obtida diretamente pela observação de estrelas. Este método de posicionamento astronômico é o mais antigo de todos. Tem sido usado ao longo dos anos por navegadores e, mais recentemente, por aviadores. Exploradores freqüentemente usavam o método de posicionamento pelos astros para se situarem em regiões não cartografadas. Geodestas precisam de determinações astronômicas, conjuntamente com outros tipos de dados, provenientes, por exemplo, de triangulações e trilaterações, para estabelecer posições precisas. Posições obtidas astronômicamente e não vinculadas a levantamentos geodésicos não podem ser relacionadas umas às outras com precisão suficiente para o cálculo de distâncias e direções.

Como o próprio termo sugere, posições astronômicas são obtidas pelas medidas de ângulos entre uma linha de prumo (vertical) em um dado ponto e a direção a uma estrela (ou várias), anotando-se o instante exato em que tais medidas são feitas. Ao se combinar essas observações com dados de catálogos estelares ou anuários astronômicos, podemos então inferir os valores de latitude e longitude do ponto de observação, aos quais chamamos de latitude e longitude astronômicas. Esta terminologia serve para diferenciar estas coordenadas daquelas baseadas em um modelo de elipsóide, que são ditas coordenadas geodésicas.

Podemos então definir latitude astronômica como sendo o ângulo entre a perpendicular ao geóide no ponto considerado e o plano do Equador terrestre. Já longitude astronômica é definida como o ângulo entre o plano do meridiano de Greenwich e o plano do meridiano que contém o ponto considerado. A figura I.1.19 ilustra estas definições.



Figura I.1.19 – *latitude e longitude astronômicas.*

A latitude astronômica pode ser determinada pela medida da altura de uma estrela na sua culminação superior, ou seja, sua altura máxima. Há métodos mais sofisticados que fazem uso de mais de uma estrela. Alguns destes métodos serão apresentados neste livro, usando conceitos que serão apresentados no Capítulo 2. Quanto à longitude astronômica, sua determinação está intimamente associada à medidas de tempo. Como veremos em mais detalhe no Capítulo 3, a longitude astronômica de um ponto é medida pela determinação da diferença de tempo (em horas, minutos e segundos) entre o instante em que uma estrela específica faz sua passagem pelo meridiano de Greenwich e o instante em que ela passa pelo meridiano do ponto considerado. Há técnicas variadas para determinação da longitude, algumas das quais serão discutidas posteriormente. Estas técnicas combinam medidas de tempo, em diversos sistemas de tempo (Capítulo 3), com as informações de anuários e efemérides, do local.

Outra determinação astronômica importante é a do azimute de uma mira. Medidas azimutais de alta precisão são usadas no método de triangulação. Novamente usando-se a figura I.1.19, o azimute astronômico de um ponto Q com relação ao ponto P é definido como o ângulo entre o plano meridiano que contém P e o plano que contém tanto Q quanto a perpendicular ao geóide passando por P. Este ângulo, em geral, tem origem no ponto cardeal norte e é contado de 0° a 360° no sentido leste.

Observações astronômicas são feitas com instrumentos óticos, como o teodolito, a câmara zenital ou o astrolábio, todos contendo mecanismos de nivelamento da base do instrumento. Quando nivelados de forma adequada, o eixo vertical desses instrumentos (que é perpendicular à sua base) coincide com a direção da aceleração gravitacional, sendo, portanto, perpendicular ao geóide naquele ponto. Dessa forma, determinações astronômicas sempre se referem ao geóide. Como o geóide é uma superfície irregular, as posições assim determinadas para diferentes pontos são independentes umas das outras.

CAPÍTULO 2

ESTUDO ANALÍTICO DO MOVIMENTO DIURNO

Movimento diurno dos astros

As estrelas visíveis no céu noturno variam com a época do ano, a hora do dia e com a latitude do observador.

A dependência com a época do ano é causada pelo fato de o Sol se mover com relação às estrelas, ao longo do ano. Este movimento anual do Sol, como veremos no próximo capítulo, é o resultado do movimento orbital da Terra em torno do Sol. O caminho do Sol no céu em seu movimento anual se chama eclíptica. Dessa forma, as estrelas que aparecem no céu noturno, ou seja, que estão longe da posição do Sol na esfera celeste, mudam lentamente ao longo do ano.

A dependência com a hora do dia se deve à rotação da Terra. De maneira geral, os astros nascem e se põem no céu à medida que a Terra gira em torno de seu eixo. Como esse movimento faz com que um observador fixo na superfície da Terra descreva um círculo no espaço, os astros, vistos por este observador, descrevem também um círculo na esfera celeste. A este movimento chamamos de movimento diurno. A rotação se dá de oeste para leste; logo, o movimento diurno dos astros no céu se dá no sentido inverso, de leste para oeste. O movimento de um ponto fixo na superfície da Terra é paralelo ao equador, mantendo-se constante, portanto, a latitude do ponto. Da mesma forma, o círculo descrito por uma estrela em seu movimento diurno é paralelo ao equador celeste. Portanto, não se altera a declinação δ da mesma (ou a sua distância polar p). Como o ponto γ é fixo com relação às estrelas, também ele se move no céu ao longo do dia. A ascensão reta então é mantida constante. Essa é a grande vantagem das coordenadas equatoriais sobre as horizontais: enquanto a altura h e o azimute A de um astro variam ao longo do dia, devido ao movimento diurno, a ascensão reta α e a declinação δ são fixas. Essas últimas variam apenas em escalas de tempo muito mais longas, devido aos efeitos de precessão, nutação, aberração, paralaxe e movimento próprio, que veremos em maior detalhe no Capítulo 4.

Passagem meridiana

Em geral, parte do círculo descrito por um astro no céu ao longo de um dia estará acima do horizonte do observador e parte dele estará abaixo. No instante em que o astro está no plano que contém o meridiano astronômico do observador, sua altura no céu é um extremo. Isso acontece duas vezes em um dia sideral; na culminação superior (ângulo horário $H = 0^\circ$) a altura do astro é máxima, na culminação inferior ($H = 180^\circ$) sua altura é mínima. A culminação superior é a melhor

ocasião para se observar o astro, já que sua altura h é máxima (distância zenital, $z_{\min}$, é mínima). Neste instante de passagem meridiana, podemos também estabelecer relações simples envolvendo a altura $h_{\max}$ e declinação δ da estrela e a latitude ϕ do observador. O primeiro passo para isso é o de construir o diagrama do plano meridiano do observador. Este é mostrado na figura I.2.1. Nele vemos o observador em O, sua vertical OZ que encontra a esfera celeste no zênite (Z) e os pontos cardeais Norte (N) e Sul (S), também pertencem ao plano meridiano o pólo celeste elevado (no caso da figura é o pólo celeste sul, PSC) e um ponto do equador celeste que cruza o plano meridiano em EC, cuja direção é, obviamente, perpendicular à direção ao pólo celeste. O meridiano astronômico é representado pelo semicírculo no diagrama. A posição de uma estrela que faz sua culminação superior também é mostrada, juntamente com sua declinação δ e sua distância zenital z . Como latitudes e declinações a sul são arbitradas como de valor negativo, enquanto que altura acima do horizonte e distância zenital são sempre positivas, faz-se necessário incluir um sinal negativo na frente de alguns ângulos mostrados, como forma de compatibilizar estas definições.

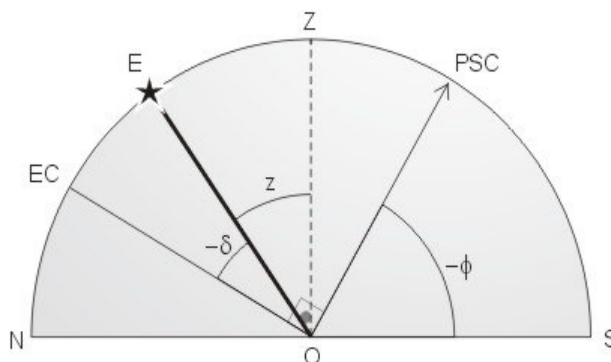


Figura I.2.1 – *diagrama do plano meridiano de um observador de latitude ϕ a sul do equador terrestre.*

Note que a figura mostra um resultado muito importante e já discutido anteriormente: a altura do pólo elevado é numericamente igual à latitude do observador. Para enfatizarmos este resultado fazemos uso da figura I.2.2, em que vemos o plano meridiano de um observador situado no ponto O da superfície da Terra. Nesta figura, vemos não apenas o plano meridiano, mas também todos os pontos na superfície da Terra que compartilham deste plano, incluindo-se ainda o centro da Terra e os seus pólos norte e sul geográficos (PNG e PSG, respectivamente). É fácil provar, usando equivalência de ângulos correspondentes e lembrando que o eixo de rotação é perpendicular ao equador e que a vertical do observador é perpendicular à sua horizontal, que a altura do pólo celeste elevado é, de fato, numericamente igual à latitude.

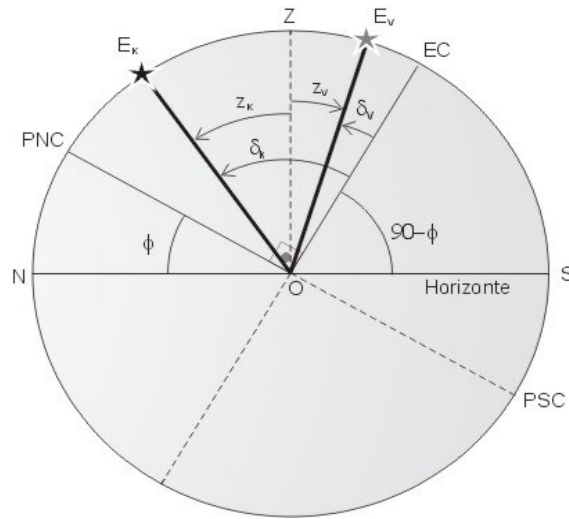


Figura I.2.3 – diagrama do plano meridiano de um observador de latitude $\phi > 0^\circ$, agora mostrando as culminações de duas estrelas: E_K e E_V , culminando respectivamente a norte e a sul do zênite (Z).

Estrelas circumpolares e estrelas invisíveis

Consideremos agora o efeito da latitude do observador sobre a visibilidade das estrelas. Por exemplo, estrelas muito próximas do pólo norte celeste, por exemplo, estão sempre acima (abaixo) do horizonte de observadores situados em latitudes norte (sul). Estrelas sempre acima do horizonte são chamadas de circumpolares. Estrelas sempre abaixo do horizonte de um observador são simplesmente chamadas de invisíveis. Para que uma estrela seja circumpolar, a altura mínima que ela atinge durante todo o dia tem que ser positiva, ou seja, $h_{\min} > 0^\circ$. A altura mínima de qualquer astro ocorre na sua culminação inferior. Pela figura I.2.4 podemos ver que a condição de circumpolaridade de uma estrela para um observador no hemisfério norte é dada por:

$$p = 90^\circ - \delta < \phi$$

$$\delta > 90^\circ - \phi.$$

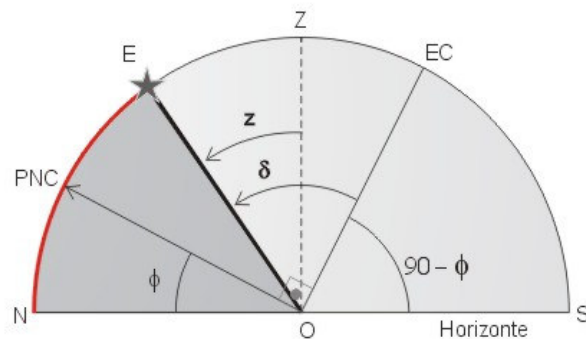


Figura I.2.4 – Diagrama do plano meridiano mostrando a região onde se situam as estrelas circumpolares (mais escura).

Na figura I.2.4, o semicírculo que passa pelos pontos cardeais Norte (N) e Sul (S) e também pelo zênite é o meridiano astronômico do observador. O pólo celeste elevado é o pólo celeste norte (PNC), cuja direção é perpendicular ao equador celeste. Este último cruza o meridiano do observador no ponto EC. A altura do pólo celeste visível é igual à latitude do observador, sendo que a direção de PNC é bissetriz do arco mostrado em tonalidade escura na figura. Este arco representa a zona ocupada pelas estrelas circumpolares para o observador em questão.

Podemos determinar nossa latitude pela observação do movimento diurno de estrelas circumpolares. O método é ilustrado na figura I.2.5.

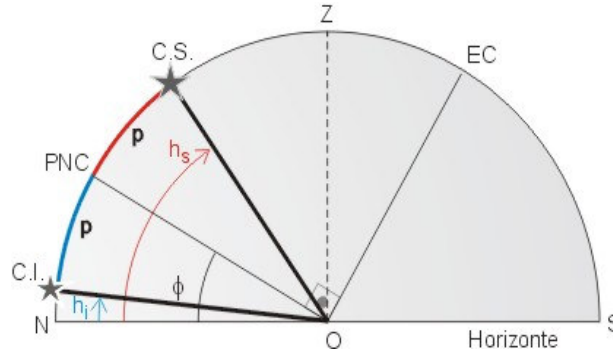


Figura I.2.5 – Relação entre a latitude ϕ do observador e as alturas de uma estrela circumpolar nas culminações inferior (h_i) e superior (h_s).

Nela vemos novamente uma representação do plano meridiano de um observador. Vemos o pólo elevado (PNC), de altura igual à latitude ϕ do observador. Vemos também as posições de uma estrela circumpolar nos momentos da culminação superior (C.S.) e inferior (C.I.). Como a declinação da estrela não muda ao longo de um dia, sua distância polar p também se mantém constante. Assim, podemos ver facilmente pela figura que as alturas máxima (h_s) e mínima (h_i) da estrela durante seu movimento diurno podem ser expressas em função de ϕ e p :

$$h_i = \phi - p$$

$$h_s = \phi + p$$

Logo, eliminando p do sistema de equações acima, teremos:

$$\phi = \frac{h_s + h_i}{2}$$

Para um observador no Hemisfério Sul da Terra, a fórmula é praticamente a mesma. A única diferença é que temos que lembrar que, neste caso, convencionou-se que a latitude é negativa, enquanto que as alturas de uma estrela circumpolar serão sempre positivas. Assim temos apenas que mudar um sinal algébrico:

$$\phi = -\frac{h_s + h_i}{2}$$

Note que o pólo sul celeste está sempre abaixo do horizonte do observador em questão. Estrelas suficientemente próximas a ele estarão sempre invisíveis a este observador. A situação é retratada na figura I.2.6, onde vemos o valor de declinação mínimo (em módulo) necessário para que uma estrela seja invisível para um observador de latitude ϕ . A condição para uma estrela nunca nasça (seja invisível) é ($h_{\max} < 0^\circ$):

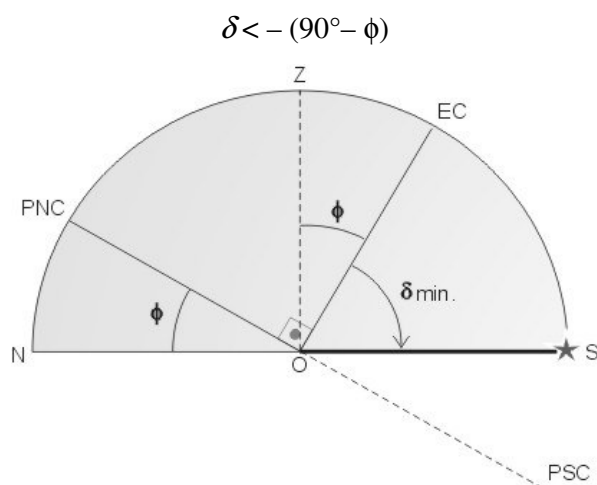


Figura I.2.6 – Diagrama do plano meridiano mostrando a condição de invisibilidade para um observador no hemisfério norte terrestre.

Assim, no caso de um observador cuja latitude é $\phi = 45^\circ$, por exemplo, estrelas com $\delta > 45^\circ$ são circumpolares e estrelas com $\delta < -45^\circ$ são invisíveis.

As condições de circumpolaridade e invisibilidade acima se aplicam para o caso em que o observador está no hemisfério norte da Terra (ou seja, $\phi > 0^\circ$). Para o hemisfério sul ($\phi < 0^\circ$) teremos:

$$\text{Circumpolaridade: } \delta < -(90 + \phi)$$

$$\text{Invisibilidade: } \delta > (90 + \phi)$$

Tente desenhar diagramas do plano meridiano de um observador, semelhantes aos diagramas das figuras I.2.4 e I.2.6 acima, mas para o caso de um observador no hemisfério sul terrestre. Ao desenhá-los, lembrando das definições de pólo e equador celestes e lembrando que a altura do pólo sul celeste será sempre igual ao módulo da latitude do observador, você deverá ser capaz de deduzir as expressões acima.

Movimento diurno: exemplos do efeito da latitude do observador

Diferentes pontos na superfície da Terra vêem diferentes partes da esfera celeste. As próximas 5 figuras representam, respectivamente, situações de observadores no pólo norte da Terra (figura I.2.7), a uma latitude norte intermediária (figura I.2.8), no equador da Terra (figura I.2.9), a uma latitude sul intermediária (figura I.2.10) e no pólo sul (figura I.2.11). Em cada uma das cinco

figuras, a linha cinza mais grossa denota o caminho diurno descrito por uma estrela de declinação $\delta > 0^\circ$ e a linha cinza mais fina representa o mesmo caminho para uma estrela de declinação $\delta < 0^\circ$. Como veremos mais adiante estes caminhos representam muito bem os arcos diurnos descritos pelo Sol em um dia de junho (linha grossa) e em um dia de dezembro (linha fina). Já nos equinócios (aproximadamente em 21/03 e 21/09) o Sol se encontra sobre o equador celeste (linha escura), sendo este então o caminho por ele percorrido no céu ao longo destes dias.

No pólo norte geográfico (latitude $\phi = +90^\circ$, figura I.2.7), o pólo norte celeste (PNC) coincide com o zênite e o equador celeste coincide com o horizonte. Assim, o céu visível é exatamente o hemisfério norte celeste. À medida que a Terra gira, todas as estrelas descrevem círculos em torno de PNC, ou seja, neste caso em torno do zênite. Os círculos por elas descritos são então paralelos ao horizonte, de altura constante (esses círculos de h constante são chamados de almucântar). Nenhuma estrela, portanto, nasce ou se põe no céu. Todas as estrelas do hemisfério norte celeste (ou seja, com $\delta > 0^\circ$) são circumpolares. As estrelas com $\delta < 0^\circ$ são sempre invisíveis. Se o Sol tem declinação positiva, ele também estará sempre acima do horizonte durante todo o dia. Por exemplo, no solstício de junho (em torno de 21/06), a declinação do Sol é $\delta = 23,5^\circ$, o que significa que ele estará o dia inteiro acima do horizonte, no almucântar de $h = 23,5^\circ$. O inverso ocorre no mês de dezembro, quando a declinação do Sol é negativa. Neste caso o Sol fica abaixo do horizonte (não se vê a linha cinza mais fina no diagrama) e um observador no pólo norte da Terra fica então imerso em noite constante.

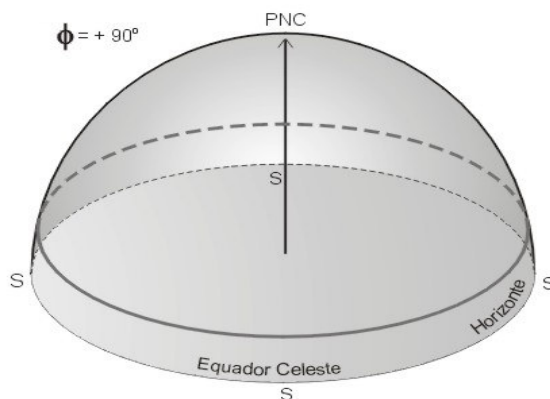


Figura I.2.7 – Arcos diurnos para um observador no pólo norte geográfico da Terra.

A uma latitude norte intermediária ($\phi = +45^\circ$, figura I.2.8), o PNC está a uma altura de 45° (a altura do pólo é sempre igual ao módulo da latitude, nunca se esqueça disso!). Metade do equador celeste está acima do horizonte e a outra metade está abaixo. Note que isso é sempre verdade, exceto para um observador nos pólos. O equador celeste cruza o horizonte nos pontos cardeais leste (E) e oeste (W). Algumas estrelas são circumpolares (aquelas com $\delta > 45^\circ$) e outras nunca nascem ($\delta < -45^\circ$). As demais estrelas nascem e se põem a cada dia, passando parte do dia

acima e parte do dia abaixo do horizonte. O Sol, por exemplo, não satisfaz nem a condição de circumpolaridade nem a de invisibilidade. Isso significa que em qualquer dia do ano o Sol nascerá e se porá a esta latitude. Claro que em junho, ele está mais próximo de satisfazer a condição de circumpolaridade, ficando, portanto mais tempo acima do horizonte, enquanto que em dezembro a situação se reverte e a noite é mais longa do que o dia. Note ainda que o Sol nasce a norte do ponto cardinal leste e se põe também a norte do ponto cardinal oeste em junho, enquanto que em dezembro tanto o nascer quanto o por do Sol se dão a sul desses pontos cardiais. Finalmente, vale notar que a altura do Sol ao passar pelo meridiano é maior em junho do que em dezembro. Como a incidência dos raios solares é mais perpendicular no primeiro caso do que no segundo, as temperaturas tendem a ser maior em resposta a este aumento na insolação (e também ao fato de o Sol passar mais tempo acima do horizonte).

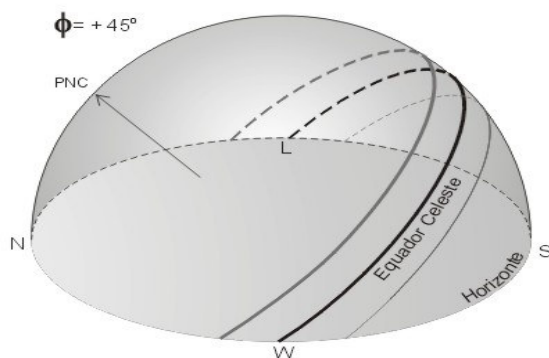


Figura I.2.8 – Arcos diurnos para um observador de latitude norte intermediária ($\phi = +45^\circ$).

Para um observador no equador de Terra ($\phi = 0^\circ$, figura I.2.9), o PNC coincide com o ponto cardinal norte (N) e o pólo celeste sul (PSC) coincide com o ponto cardinal sul. O equador celeste é neste caso um círculo vertical, passando, portanto pelo zênite. Durante um dia, à medida que a Terra gira em torno do seu eixo de rotação (que liga PSC a PNC), toda a esfera celeste vai sendo revelada. Não há, por conseguinte, estrelas circumpolares nem invisíveis; todas as estrelas nascem e se põem para este observador de latitude nula. Em qualquer dia do ano, o movimento diurno do Sol é sempre ao longo de círculos perpendiculares ao horizonte, metade dos quais está acima do horizonte. O Sol, portanto, fica sempre 12h acima e 12h abaixo do horizonte. Note que nos equinócios, o Sol estando no equador celeste, ele passa pelo zênite ao meio-dia. Como a insolação não muda muito ao longo do ano, as variações sazonais de temperatura são minimizadas nas regiões equatoriais.

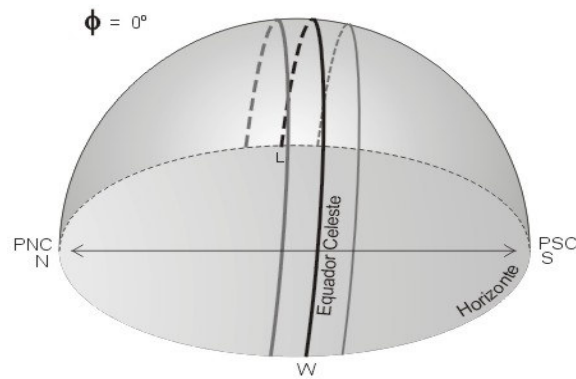


Figura I.2.9 – Arcos diurnos vistos por um observador situado sobre o equador geográfico da Terra ($\phi = +0^\circ$).

Seja agora um ponto a uma latitude intermediária sul ($\phi = -45^\circ$, figura I.2.10): a situação é análoga ao caso da latitude intermediária norte. Mas desta vez é o PSC que está a uma altura de 45° . Novamente, algumas estrelas são circumpolares (aquelas com $\delta < -45^\circ$) e outras nunca nascem ($\delta > +45^\circ$). As demais estrelas nascem e se põem a cada dia, passando parte do dia acima e parte do dia abaixo do horizonte. O Sol novamente nasce e se põe todos os dias. Mas agora, ele fica mais da metade do dia acima do horizonte nos meses próximos a dezembro, resultando no verão no hemisfério sul. Próximo a junho, seu caminho no céu ao longo do dia está majoritariamente abaixo do horizonte. Os pontos de nascer e ocaso do Sol novamente estão a norte ou sul dos pontos cardeais E e W, dependendo também da época do ano.

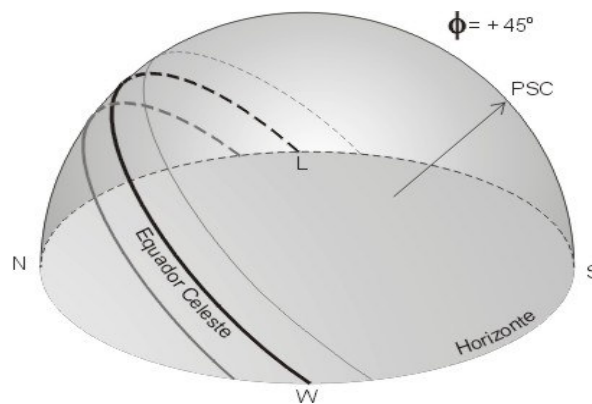


Figura I.2.10 – Arcos diurnos vistos por um observador situado em latitude sul intermediária ($\phi = -45^\circ$).

No pólo sul (latitude $\phi = -90^\circ$, figura I.2.11), a situação é também análoga ao caso correspondente a norte. O PSC agora coincide com o zênite e o equador celeste coincide com o horizonte. Assim, o céu visível é exatamente o hemisfério sul celeste. À medida que a Terra gira, todas as estrelas descrevem círculos em torno de PSC, ou seja, neste caso em torno do zênite. Os círculos por elas descritos são novamente almucântares e nenhuma estrela nasce ou se põe no céu: todas as estrelas do hemisfério sul celeste são circumpolares. e todas as estrelas com $\delta > 0^\circ$ são

sempre invisíveis. O Sol fica o dia inteiro acima do horizonte entre os dias 21/09 e 21/03, passando a ficar sempre abaixo do horizonte entre 21/03 e 21/09.

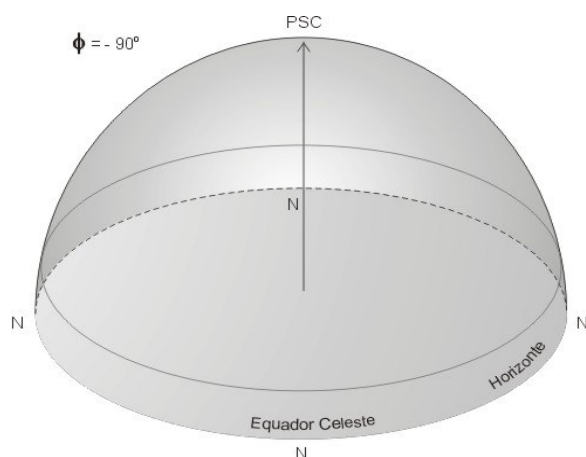


Figura I.2.11 – Arcos diurnos para um observador situado no pólo sul geográfico ($\phi = -90^\circ$).

Trigonometria Esférica

Já estudamos qualitativamente o movimento diurno, concluindo que todos os astros completam diariamente um círculo paralelo ao equador celeste. Estudamos o caso particular em que um objeto atravessa o meridiano astronômico de um observador e vimos que nesta situação a sua altura no céu atinge um valor extremo (máximo na culminação superior e mínimo na culminação inferior). Além disso, estabelecemos relações matemáticas entre a latitude do observador e a declinação e altura da estrela na passagem meridiana. Na verdade, as coordenadas de uma estrela no céu estão associadas à posição do observador na superfície da Terra em qualquer instante, mesmo fora da passagem meridiana. Há relações matemáticas bem mais gerais envolvendo coordenadas horizontais, horárias e equatoriais de uma estrela e a latitude e longitude do observador. Para deduzirmos essas relações, contudo, faz-se necessário estudarmos um ramo da Trigonometria chamado de Trigonometria Esférica, cuja aplicação à Astronomia constitui-se no que chamamos de Astronomia Esférica. Esta não é a mais excitante das disciplinas, mas é muito importante para a prática da Astronomia, pois o céu tem geometria esférica e não plana.

A Trigonometria Esférica é análoga à trigonometria plana, mas com a diferença muito importante de ser aplicada a triângulos esféricos.

Triângulos Esféricos

Um triângulo esférico é uma figura sobre uma superfície esférica que resulta quando consideramos três grandes círculos (ou círculos máximos) sobre essa superfície. Um grande círculo é qualquer círculo sobre a superfície esférica que a divida em dois hemisférios. Um plano que contém um grande círculo necessariamente contém também o centro da esfera. A figura I.2.12

mostra um triângulo esférico. Vemos uma esfera com centro em O e três pontos em sua superfície: A, B e C. Ao unirmos estes três pontos, dois a dois, através de círculos máximos, formamos uma figura ABC que se assemelha a um triângulo, mas que se situa sobre a esfera: um triângulo esférico, portanto.

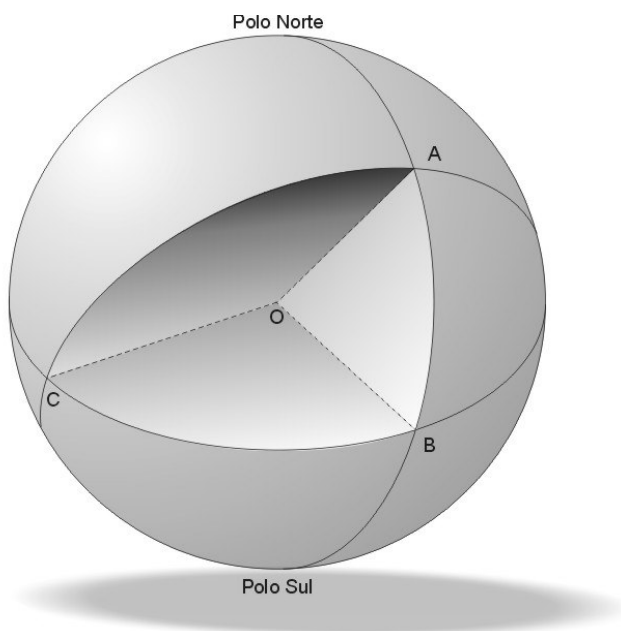


Figura I.2.12 –*Representação de um triângulo esférico (de vértices A, B e C) sobre a superfície de uma esfera.*

Note que um triângulo esférico não é qualquer figura de três vértices desenhada sobre uma esfera; para ser um triângulo esférico esta figura tem que ter lados que sejam arcos de grande círculo. Outra observação importante sobre triângulos esféricos é que tanto os seus ângulos quanto os seus lados são medidos em unidades angulares. Os lados de um triângulo esférico são arcos de círculo máximo que, divididos pelo raio da esfera nos dão o ângulo, com vértice no centro da esfera, entre os pontos que eles ligam. Já os ângulos em cada vértice do triângulo esférico representam a separação angular entre os planos dos grandes círculos que se interceptam naquele vértice.

Os triângulos esféricos têm algumas características que os distinguem dos triângulos planos. Neste último, por exemplo, a soma dos seus ângulos internos é sempre igual a 180° . No caso dos esféricos, a soma dos ângulos é sempre compreendida entre 180° e 540° . Existem vários livros que abordam a Trigonometria Esférica de uma perspectiva mais geral e aprofundada, discutindo e apresentando vários teoremas e resultados de interesse geral sobre os triângulos esféricos. Exemplos são as apostilas sobre Trigonometria e Astronomia Esférica de C. Gemael (UFPR) e o livro Conceitos de Astronomia, de R. Boczko. Aqui vamos adotar uma abordagem mais objetiva, voltando-nos diretamente para situações de interesse Geodésico e Astronômico.

Na figura I.2.13 vemos um exemplo geográfico de um triângulo esférico. Trata-se do triângulo que tem como vértices o pólo sul geográfico e as cidades de Rio de Janeiro e *Cape Town*

(África do Sul). Os lados do triângulo que ligam cada uma dessas duas cidades ao pólo sul são simplesmente arcos ao longo dos seus respectivos meridianos geográficos (arcos de grandes círculos, portanto). Já o lado que liga as duas cidades é também um arco de grande círculo.

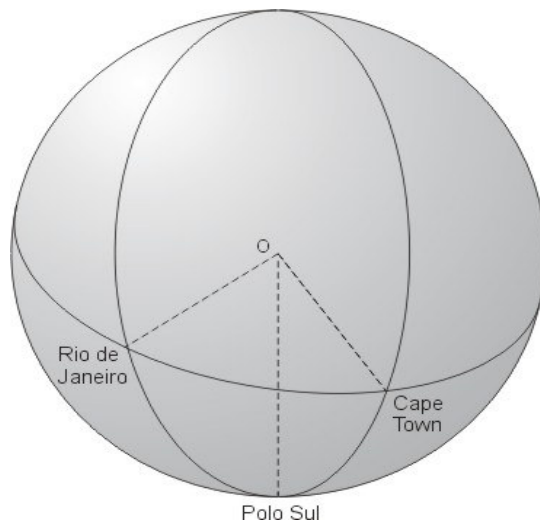


Figura I.2.13 – *Exemplo geográfico de um triângulo esférico.*

Por que o estudo de triângulos esféricos é importante para a Astronomia? O motivo é que, em qualquer instante, exceto pela passagem meridiana, um astro forma um triângulo esférico com o pólo celeste de seu hemisfério equatorial e com o zênite do observador. Este triângulo é chamado de triângulo de posição do astro. Na figura I.2.14 vemos representado o triângulo de posição de uma estrela (cuja posição na esfera celeste é representada pela letra E). A figura inclui também a posição do observador (O), os planos equatorial e horizontal e o plano meridiano (contendo Z, N, S e M). Estão indicadas na figura várias coordenadas associadas à estrela, como sua altura h , sua distância zenital z , sua declinação δ e sua distância polar p . Estão indicados ainda o ângulo horário H da estrela e, pela altura do pólo celeste elevado (PN), a latitude ϕ do observador. Esta figura é fundamental, pois envolve quase todos os conceitos e definições que vimos até agora. Recomendamos que o leitor reveja as definições de cada coordenada e de cada ponto e círculo da esfera celeste mostrados na figura I.2.14, até que esteja com ela bem familiarizado e entenda bem o que está vendo.

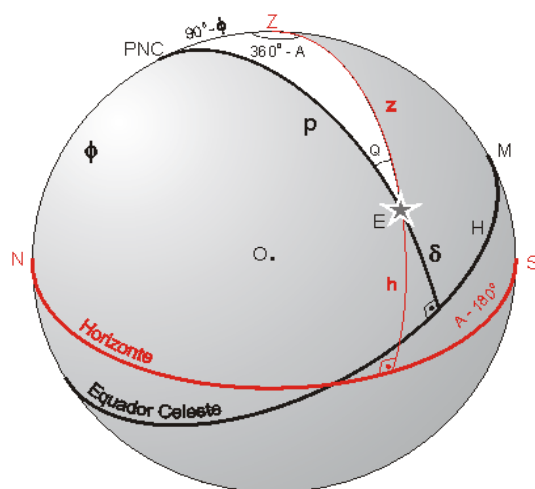


Figura I.2.14 – Triângulo de posição de um astro (em branco), mostrado sobre a esfera celeste, juntamente com as coordenadas horizontais e equatoriais, além dos pontos e círculos mais importantes.

Fórmulas de Trigonometria Esférica

Podemos então aplicar inúmeras relações entre os elementos de um triângulo esférico ao triângulo de posição de um astro. Estas relações são deduzidas a seguir para um triângulo esférico genérico, de lados a , b e c e ângulos A , B e C . Considere o triângulo genérico da figura I.2.15. Na figura também mostramos o centro da esfera, O . Conforme já mencionado, o lado a do triângulo, por exemplo, é um arco de grande círculo que mede o ângulo, com vértice em O , entre os segmentos de reta OC e OB , e assim por diante. O ângulo A (ou seja, com vértice em A), por seu turno, mede a separação entre os planos $O\hat{A}B$ e $O\hat{A}C$.

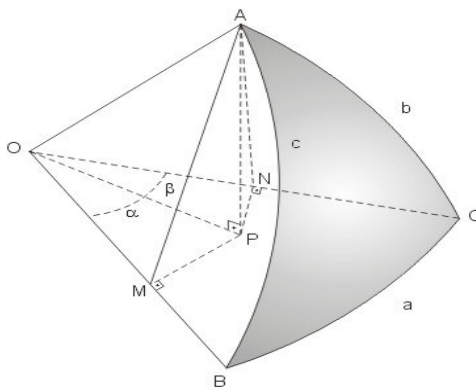


Figura I.2.15 – Triângulo esférico genérico (com vértices A , B e C).

Vamos agora deduzir algumas fórmulas importantes que associam lados e ângulos de um triângulo esférico. Primeiramente, consideremos a perpendicular ao plano $O\hat{B}C$ e que passa pelo vértice em A do triângulo da figura I.2.15. Essa reta é representada pelo segmento AP da figura. A partir do ponto P , tomemos agora duas retas, PN e PM , perpendiculares, respectivamente, aos

segmentos OB e OC. Ao tomarmos estas retas, formamos na figura vários triângulos (planos) retângulos: ANP, AMP, ONP, OMP e OAP. Além desses, são também triângulos retângulos OAN e OAM. Usando todos estes triângulos poderemos então deduzir várias fórmulas.

Considere o triângulo OAN, por exemplo. O ângulo com vértice em O deste triângulo mede a separação entre o cateto ON e a hipotenusa OA. Mas este ângulo é o lado b do triângulo esférico. Logo podemos escrever:

$$\cos(b) = \frac{ON}{OA} ; \sin(b) = \frac{AN}{OA}$$

Analogamente, considerando o triângulo OAM, cuja hipotenusa é OA (o raio da esfera), teremos:

$$\cos(c) = \frac{OM}{OA} ; \sin(c) = \frac{AM}{OA}$$

Sejam agora os triângulos ONP e OMP, cuja hipotenusa é OP. E sejam novamente os ângulos com vértice em O, representados pelas letras gregas α e β . Podemos escrever:

$$\cos(\alpha) = \frac{OM}{OP} ; \sin(\alpha) = \frac{MP}{OP}$$

$$\cos(\beta) = \frac{ON}{OP} ; \sin(\beta) = \frac{NP}{OP}$$

Podemos então escrever que $OM = OP \cos \alpha$. Substituindo esta relação na expressão para $\cos c$ acima e lembrando que $\alpha + \beta = a$, temos:

$$\begin{aligned} OM &= OA \cos(c) = OP \cos(a - \beta) = OP [\cos(a)\cos(\beta) + \sin(a)\sin(\beta)] \rightarrow \\ \rightarrow OA \cos(c) &= OP (\cos(a) \frac{ON}{OP} + \sin(a) \frac{NP}{OP}) = ON \cos(a) + NP \sin(a) \rightarrow \\ \rightarrow OA \cos(c) &= OA \cos(b)\cos(a) + NP \sin(a) \end{aligned}$$

Esta última linha resulta da expressão para ON usando o triângulo OAN, dada anteriormente. Precisamos agora encontrar uma expressão para NP. Usando o triângulo ANP (retângulo em P e com hipotenusa AN), temos:

$$NP = AN \cos(\hat{N}) = AN \cos(C) = OA \sin(b)\cos(C)$$

onde $\hat{N}$ é o ângulo, com vértice em N, entre os segmentos AN e NP. Mas este ângulo é igual ao ângulo C do triângulo esférico, ou seja, o ângulo entre os planos OAC e OBC.

Substituindo na expressão anterior temos então:

$$OA \cos(c) = OA \cos(b)\cos(a) + NP \sin(a) = OA \cos(b)\cos(a) + OA \sin(b)\cos(C)\sin(a)$$

Resulta finalmente em:

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(C)$$

Esta é a chamada fórmula dos 4 elementos, em que os 3 lados do triângulo esférico são associados a um de seus ângulos. Note que o lado cujo co-seno aparece no lado esquerdo é aquele

oposto ao ângulo que entra na fórmula. Podemos escrever outras duas fórmulas análogas (cuja dedução também é inteiramente análoga):

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(B)$$

Há também as fórmulas dos 4 elementos aplicadas a ângulos:

$$\cos(A) = -\cos(B)\cos(C) + \sin(B)\sin(C)\cos(a)$$

$$\cos(B) = -\cos(A)\cos(C) + \sin(A)\sin(C)\cos(b)$$

$$\cos(C) = -\cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)\cos(c)$$

Pelas fórmulas aplicadas aos triângulos OAN, OAM, ANP e AMP acima, podemos também deduzir a analogia dos senos.

$$AM = OA \sin(c) = \frac{AP}{\sin(B)}$$

$$AN = OA \sin(b) = \frac{AP}{\sin(C)}$$

Logo:

$$\frac{AP}{OA} = \sin(b) \sin(C) = \sin(c) \sin(B) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\sin(b)}{\sin(B)} = \frac{\sin(c)}{\sin(C)} = \frac{\sin(a)}{\sin(A)}$$

Astronomia Esférica

Apliquemos agora as fórmulas de Trigonometria Esférica, deduzidas anteriormente, ao triângulo de posição de uma estrela, representado na figura I.2.16 pelo triângulo esférico E–Z–PNC. Os lados deste triângulo, conforme indicado, são o complemento da latitude do observador ($90^\circ - \phi$), a distância zenital z ($90^\circ - h$) e a distância polar p ($p = 90^\circ - \delta$). Além do ângulo Q , com vértice em E e mostrado na figura, ou outros ângulos do triângulo de posição são o ângulo horário H , com vértice em PNC (pois é o ângulo entre o plano meridiano e o círculo horário da estrela) e $360^\circ - A$, com vértice no zênite. Este último é o ângulo entre o plano meridiano e o vertical da estrela, estando obviamente ligado ao azimute. O fato de seu valor ser $360^\circ - A$ se deve à escolha particular da origem do azimute na direção norte e crescendo para leste–sul–oeste.

A analogia dos senos nos dá então:

$$\frac{\cos(\delta)}{\sin(360^\circ - A)} = \frac{\cos(\phi)}{\sin(Q)} = \frac{\sin(z)}{\sin(H)} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{\cos(\delta)}{\sin(A)} = \frac{\cos(\phi)}{\sin(Q)} = \frac{\sin(z)}{\sin(H)}$$

Note que a inclusão do valor absoluto da soma $\delta + \phi$ na expressão acima visa a compatibilizar os domínios em que são definidas as diferentes variáveis envolvidas. A distância zenital z , por exemplo, é definida no domínio $0^\circ < z < 180^\circ$. Dependendo dos valores de latitude e declinação, que são definidas no domínio entre -90° e $+90^\circ$, a não inclusão do valor absoluto poderia violar o domínio em z . Assim, ainda que haja mais soluções matemáticas para o caso de $H = 180^\circ$, a solução astronômica para a situação da culminação inferior exige que se considere o módulo de $\delta + \phi$. Situações deste tipo não são raras e, portanto, temos que sempre ter em mente as definições e domínios de valores para as grandezas envolvidas e adaptar as soluções matemáticas gerais dadas pelas equações da trigonometria esférica ao caso astronômico com que estamos lidando.

Há também a situação do nascer e ocaso de uma estrela, $z = 90^\circ$. Neste caso, pelas fórmulas dos 4 elementos, temos:

$$\cos(H) = -\operatorname{tg}(\delta)\operatorname{tg}(\phi)$$

$$\cos(A) = \frac{\operatorname{sen}(\delta)}{\cos(\phi)}$$

A primeira expressão acima mostra que um astro só nasce e se põe se:

$$|\operatorname{tg}(\delta)\operatorname{tg}(\phi)| < 1 \rightarrow$$

$$|\operatorname{tg}(\delta)| < |\cotg(\phi)| \rightarrow$$

$$|\operatorname{tg}(\delta)| < |\operatorname{tg}(90^\circ - \phi)| \rightarrow$$

$$|\delta| < |(90^\circ - \phi)|$$

A segunda expressão resulta na mesma restrição acima, pois $|\cos(A)|$ também tem que ser menor do que a unidade

A restrição acima também requer cuidado. Se a latitude é $\phi < 0$, então $(90^\circ - \phi) > 90^\circ$, o que novamente viola o domínio de valores permitidos para a declinação δ . Assim, no caso de um observador no hemisfério Sul, podemos substituir $(90^\circ - \phi)$ por $(90^\circ + \phi)$, já que o módulo da tangente será o mesmo, independente do sinal aritmético do argumento. Assim, usando o sinal positivo no argumento, respeitamos os limites possíveis para a declinação.

Ou seja, uma estrela nasce e se põe somente se:

$$|\delta| < 90 - \phi, \text{ para } \phi > 0^\circ$$

$$|\delta| < 90 + \phi, \text{ para } \phi < 0^\circ$$

Essas condições também já haviam sido deduzidas anteriormente, quando estudamos estrelas circumpolares e invisíveis.

Há ainda outras situações úteis, em que as fórmulas da Trigonometria Esférica se simplificam. Por exemplo, quando $A = 90^\circ$ ou $A = 270^\circ$ dizemos que a estrela passa pelo 1º e 2º

verticais, respectivamente. Analogamente, quando $H = 90^\circ$ ou $H = 270^\circ$, temos os círculos das 6h e 18h. Quando $Q = \pm 90^\circ$, dizemos que a estrela está em elongação. Em todas estas situações o triângulo de posição da estrela é retângulo. Há outras situações em que o triângulo de posição se torna retilátero, ou seja, com um lado igual a 90° . Vimos o caso do nascer e o caso ($z = 90^\circ$). Há também os casos que envolvem astros ou observadores especiais, como o de uma estrela que pertença ao Equador Celeste ($\delta = 0^\circ$), ou o de um observador situado no Equador da Terra ($\phi = 0^\circ$). Procure você mesmo deduzir as fórmulas dos senos e dos 4 elementos nestes casos especiais.

Um outro conceito importante é o de velocidade zenital. Esta é a taxa de variação no tempo da distância zenital, $\partial z / \partial H$. Podemos deduzir uma expressão para a velocidade zenital usando a fórmula dos quatro elementos envolvendo o ângulo horário:

$$\cos(z) = \sin(\delta)\sin(\phi) + \cos(\delta)\cos(\phi)\cos(H)$$

Para isto basta derivarmos ambos os lados desta fórmula com relação ao ângulo horário (= tempo). Teremos então:

$$\begin{aligned} -\frac{\sin(z)dz}{\partial H} &= -\cos(\phi)\cos(\delta)\sin(H) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial z}{\partial H} &= \frac{\cos(\phi)\cos(\delta)\sin(H)}{\sin(z)} \end{aligned}$$

O valor da velocidade zenital do Sol no início ou final do dia, por exemplo, determina a duração daquela fase do dia em que nem é dia claro nem escuridão total, o que comumente denominamos de crepúsculo. Quanto menor o valor de $\partial z / \partial H$, mais longo é o crepúsculo. Pela dependência da expressão acima com a latitude e com o ângulo horário, vemos que este será mais longo em lugares de latitude alta e/ou quando o valor de H do Sol ao nascer e se por é mais distante dos valores 90° ou 270° (ou seja, em torno dos solstícios).

CAPÍTULO 3

MOVIMENTO ANUAL DO SOL E SISTEMAS DE TEMPO

Movimento Anual do Sol

As estrelas que vemos à noite têm posições fixas no céu umas com relação às outras (exceto pelos efeitos secundários de aberração, paralaxe e movimento próprio, que discutiremos mais adiante). O Sol, contudo se move por entre as estrelas a uma taxa de 1° por dia aproximadamente. Assim, ao final de um ano, terá descrito um grande círculo no céu, a que chamamos de eclíptica. O movimento anual do Sol no céu é causado pelo movimento orbital da Terra em torno deste. A figura I.3.1 mostra a variação da posição do Sol no céu com relação às estrelas mais distantes à medida que a Terra se move em sua órbita anual. A órbita corresponde à elipse mais interna da figura. A esfera maior, mostrada em quatro diferentes posições da órbita, representa a Terra, enquanto que a esfera central representa o Sol. A elipse mais externa da figura é a eclíptica.

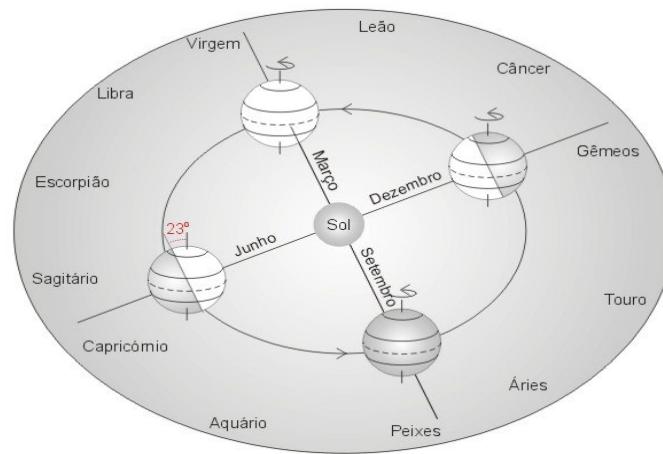


Figura I.3.1 – *Movimento orbital da Terra, resultando no movimento anual do Sol na esfera celeste, sobre a eclíptica.*

As estrelas formam figuras imaginárias no céu, a que chamamos de constelações. As constelações atravessadas pela eclíptica são chamadas de constelações zodiacais. A faixa do céu coberta por estas constelações é chamada de zodíaco. Por entre as estrelas do zodíaco move-se não apenas o Sol, mas também os demais astros do sistema solar, como a Lua e os planetas.

Em torno do dia 21 de março o Sol, em seu caminho sobre a eclíptica, atravessa o equador celeste. Este ponto de intersecção entre os dois grandes círculos é o ponto vernal (ou ponto γ). Neste dia, chamado de Equinócio de março, o Sol cruza o equador celeste de sul para norte, marcando então o fim do verão no hemisfério sul da Terra e o fim do inverno no hemisfério norte. Pela

definição de ascensão reta, neste dia seu valor para o Sol é $\alpha = 0h$. Como está sobre o equador celeste, a declinação do Sol no equinócio de março também é nula. Pela figura acima, vemos que o Sol, visto da Terra, é projetado na eclíptica na direção da constelação de Peixes nesta época.

Uns 3 meses depois, em torno de 21 de junho, o Sol alcança seu maior valor de declinação: $\delta = 23\frac{1}{2}^\circ$. Nesta época ele é visto sobre a constelação de Gêmeos. A partir deste instante, o Sol começa a se mover em direção ao sul, de volta ao equador celeste. Este dia é chamado de Solstício de junho, marcando o início do verão (inverno) no hemisfério norte (sul). Neste dia, $\alpha = 6h$ para o Sol. Em torno do dia 21 de setembro, o Sol volta a cruzar o equador celeste, mas desta vez do hemisfério norte para o hemisfério sul. É o Equinócio de setembro, fim do inverno (verão) no hemisfério norte (norte) terrestre. O Sol está agora em Virgem. Coordenadas equatoriais do Sol: $\alpha = 12h$; $\delta = 0^\circ$.

Finalmente, uns 3 meses depois, o Sol atinge seu ponto mais a sul na esfera celeste: $\delta = -23\frac{1}{2}^\circ$, $\alpha = 18h$. Este é o Solstício de dezembro, sempre em torno do dia 21/12. É o início do verão (inverno) no hemisfério sul (norte). A partir deste dia, o Sol começa a se mover para norte até reatingir o ponto vernal no dia 21/3 do ano seguinte.

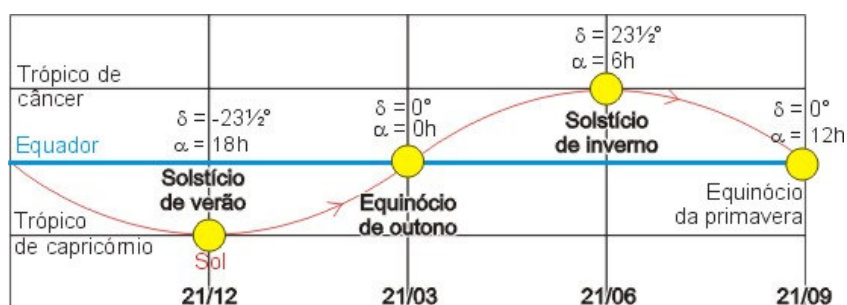


Figura I.3.2 – Representação da eclíptica (curva mais fina) sobre a esfera celeste, com a posição do Sol nos equinócios e solstícios.

Em resumo, em sua jornada anual ao longo da eclíptica, o Sol percorre 24h de ascensão reta, a uma taxa média de 2h por mês. Note que este movimento anual é independente do movimento diurno, compartilhado por todos os astros e causado pela rotação da Terra. O movimento diurno é mais facilmente notável, pois se dá a velocidade bem maior, de 24h por dia.

A figura I.3.2 mostra uma espécie de “mapa *mundi*” da esfera celeste, no qual vemos toda a região com $|\delta| \leq 47^\circ$ projetada em um plano. O equador celeste é a linha horizontal que corta a figura em duas metades. As demais linhas horizontais são paralelos de declinação, ou seja, círculos (pequenos) contendo todos os pontos de declinação constante, no caso, com $\delta = \pm 23,5^\circ$. Estes paralelos de declinação sobre a abóbada celeste são as projeções no céu dos Trópicos de Câncer (latitude $\phi = 23,5^\circ$) e de Capricórnio (latitude $\phi = -23,5^\circ$), tal como indicado. As retas verticais representam os círculos horários, de ascensão reta constante. A eclíptica é a linha curva e mais fina,

sendo que os dois pontos em que ela cruza o equador celeste, no meio e no extremo direito figura, são, respectivamente, os pontos γ e Ω .

Já a tabela abaixo mostra as coordenadas equatoriais do Sol nos equinócios e solstícios.

Posições Especiais do Sol na Eclíptica			
Nome	Data Aprox.	Coords. Sol	
		α	δ
Equinócio março	21/03	0h	0°
Solstício junho	21/06	6h	$23\frac{1}{2}^\circ$
Equinócio setembro	21/09	12h	0°
Solstício dezembro	21/12	18h	$-23\frac{1}{2}^\circ$

Estações do Ano e Eclipses

As estações do ano em nosso planeta

As estações do ano resultam do fato de que o eixo de rotação da Terra está inclinado por uns $23,5^\circ$ com relação à normal ao seu plano orbital (plano da eclíptica). A este ângulo chamamos de obliquidade da eclíptica, sendo comumente representado pela letra grega epsilon (ϵ). O eixo aponta sempre na mesma direção no espaço (exceto pelos efeitos secundários de precessão e nutação, que discutiremos mais adiante), de forma que o pólo norte geográfico está por vezes inclinado na direção do Sol (de junho a agosto) e por vezes na direção oposta (de dezembro a março). Estas duas situações, obviamente, caracterizam o inverno e verão no Hemisfério Sul da Terra, sendo a situação inversa no Hemisfério Norte.

A figura I.3.3 procura ilustrar a situação: o Sol é representado pela esfera no centro da figura. A linha horizontal pertence ao plano da órbita da Terra em torno do Sol (este plano é perpendicular à figura). A Terra (esfera menor) é mostrada em duas situações distintas: à esquerda, vemos a Terra no dia do solstício de dezembro. Nesta situação, os raios solares incidem perpendicularmente sobre o Trópico de Capricórnio (= paralelo de latitude, $\phi = -23,5^\circ$). Outra maneira de dizer a mesma coisa é que a declinação do Sol é $\delta = -23,5^\circ$. Pelo fato do Sol iluminar mais o Hemisfério Sul, as noites são mais curtas e os dias mais longos neste hemisfério do que no Norte. A incidência mais perpendicular dos raios solares sobre o Hemisfério Sul também ajuda a aquecer as regiões a sul do Equador; inicia-se, portanto, o verão (inverno) no Hemisfério Sul (Norte) geográfico. Já na posição à direita, a Terra está no extremo oposto de sua órbita anual, sendo este então o solstício de junho. A declinação do Sol é agora $\delta = +23,5^\circ$ e os raios solares

incidem perpendicularmente sobre o Trópico de Câncer ($\phi = +23,5^\circ$) neste dia. Trata-se do início do inverno (verão) no Hemisfério Sul (Norte).

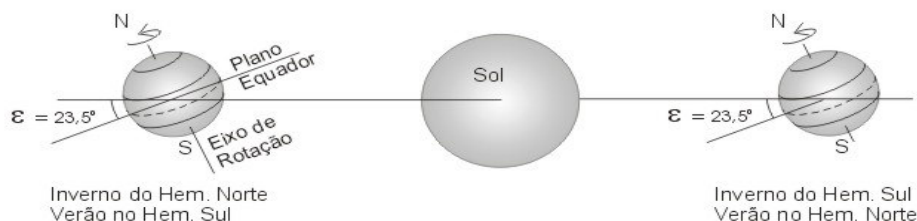


Figura I.3.3 – *Efeito da obliquidade da eclíptica: situações de solstícios de dezembro (painel à esquerda) e de junho (painel à direita).*

Sabemos que o céu muda sazonalmente, havendo constelações visíveis somente no verão ou no inverno em cada hemisfério. Isso ocorre porque, à medida que o Sol se move pela eclíptica (como reflexo do movimento orbital da Terra em seu torno), as estrelas que aparecem no céu noturno (ou seja, que se situam longe do Sol) variam.

Eclipses

Eclipses ocorrem quando a Terra, Sol e Lua se encontram sobre uma linha reta. Podemos então ter duas situações distintas: 1) a Lua se situa entre o Sol e a Terra, projetando sua sombra sobre esta última. 2) a Terra se situa entre o Sol e a Lua, projetando sua sombra sobre esta última. No primeiro caso temos um eclipse solar, no segundo um eclipse lunar. Note que eclipses lunares só ocorrem quando a Lua está na fase cheia, enquanto que os eclipses solares só ocorrem quando a Lua está na fase nova.

Outra diferença é que a sombra da Lua projetada sobre a Terra não cobre toda a superfície desta última. Já a sombra da Terra é suficientemente grande (e a Lua suficientemente pequena) para cobrir toda a Lua. Assim, eclipses solares só são visíveis de alguns pontos da Terra, mas eclipses lunares são visíveis por qualquer observador que tenha a Lua acima do seu horizonte quando ocorrem.

Por que não ocorrem eclipses todo mês?

- Por que o plano da órbita da Lua em torno da Terra não coincide com o plano da órbita da Terra em torno do Sol. Uma outra maneira de dizer isso é que a Lua não se move sobre a eclíptica, mas sobre um outro grande círculo no céu, que faz um ângulo de 5° com a eclíptica.

A linha que conecta os dois pontos de intersecção entre o plano da eclíptica e a órbita da Lua é chamada de linha dos nodos. Somente quando a linha dos nodos aponta na direção do Sol podem

ocorrer eclipses. Há, portanto, duas épocas ao longo do ano em que podem ocorrer eclipses. Estas épocas mudam com o tempo devido às perturbações gravitacionais sofridas pela órbita da Lua. A linha dos nodos orbitais da Lua varre um ângulo de 360° em um período de 18,6 anos (chamado de ciclo de Saros). A figura I.3.4 ilustra este movimento da linha dos nodos orbitais da Lua. O painel da esquerda mostra a órbita da Lua projetada no céu, juntamente com a eclíptica, num determinado instante. O painel da direita representa a posição relativa dos dois grandes círculos aproximadamente 1 ano depois, tendo a órbita lunar mudado de orientação com relação à eclíptica, o mesmo naturalmente ocorrendo com a linha dos nodos.

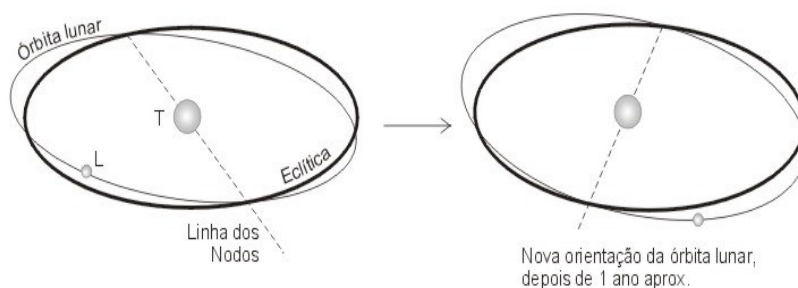


Figura I.3.4 – a eclíptica e a órbita lunar, cuja intersecção define a linha dos nodos lunares.

A figura I.3.5 mostra a eclíptica e a órbita da Lua projetadas sobre a esfera celeste. Elas fazem um ângulo de $5,2^\circ$ entre si. Este é o valor da inclinação da órbita da Lua em torno da Terra com relação ao plano orbital da Terra em torno do Sol. Os dois nodos orbitais da Lua são também mostrados. A linha que os conecta é a linha dos nodos e somente quando a Lua Cheia ou Nova ocorrem perto destas posições temos eclipses.

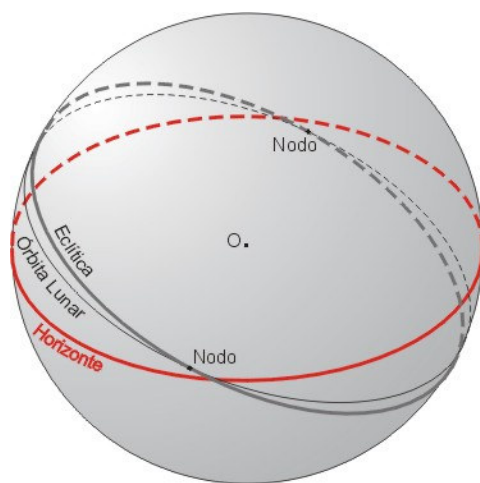


Figura I.3.5 – Projeção da órbita lunar e da eclíptica na esfera celeste, sendo os nodos da órbita lunar os pontos de intersecção entre os dois círculos.

A figura I.3.6 descreve os eclipses da Lua e do Sol usando os cones de sombra que a Lua e a Terra projetam no espaço. Nos dois primeiros painéis, a luz do Sol vem da esquerda da figura. Quando a Lua está à esquerda da Terra, ela é nova, pois sua face iluminada é invisível para nós. A

Lua cheia é representada à direita da Terra. No painel superior, as fases cheia e nova não levam os eclipses, pois o cone de sombra da Lua (da Terra) não se projeta sobre a Terra (Lua). Essas fases estão ocorrendo fora dos nodos orbitais, quando, portanto, o Sol não se situa ao longo da reta que liga a Terra à Lua. No painel do meio, por outro lado, os três astros estão alinhados, fazendo com que a sombra da Lua Nova se projete sobre uma pequena região da superfície da Terra (causando um eclipse do Sol nesta região) e com que a sombra da Terra se projete sobre a Lua Cheia (causando um eclipse lunar).

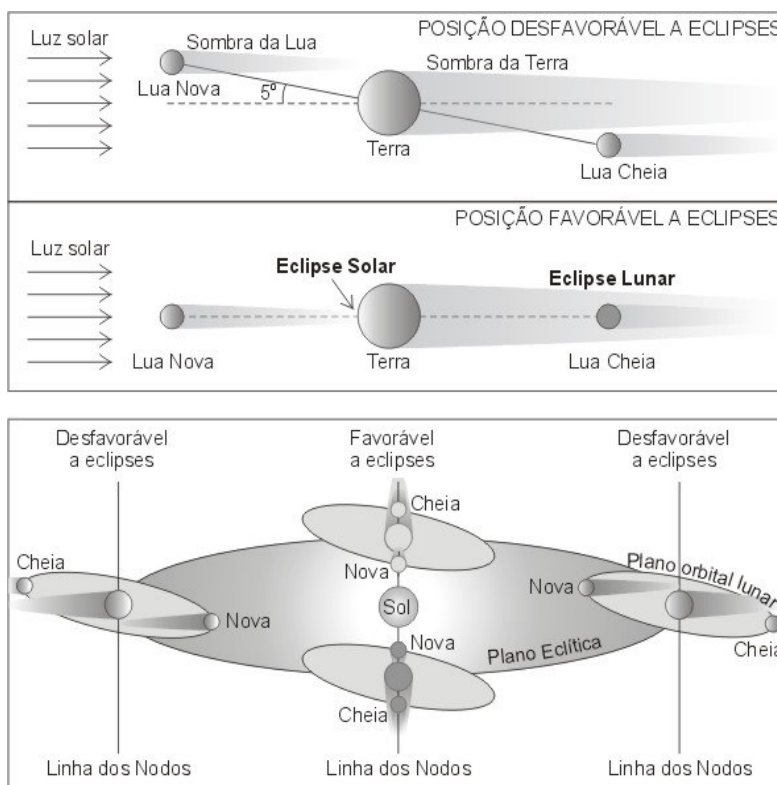


Figura I.3.6 – *Situações favoráveis e desfavoráveis à ocorrência de eclipses. Painéis superiores: jogo de sombras; painel inferior: elementos orbitais e jogo de sombras.*

Já a painel inferior da figura I.3.6 combina os elementos orbitais e o jogo de sombras para mostrar a situação favorável à ocorrência de eclipses. A linha dos nodos orbitais da Lua é a linha vertical que corta o centro da figura. Ao longo dela vemos que as fases nova e cheia da Lua acarretam eclipses. Já quando o Sol está fora da linha dos nodos (situações mostradas nas partes à esquerda e à direita da figura), as fases nova e cheia não levam aos eclipses, pois o cone de sombra da Lua (da Terra) não é projetado sobre a Terra (a Lua).

A ocorrência de eclipses solares é devida a uma coincidência: o fato de que os diâmetros angulares da Lua e do Sol, vistos da Terra, são quase iguais.

Mas note que o diâmetro aparente da Lua varia ao longo do mês, pois sua órbita em torno da Terra é uma elipse moderadamente excêntrica; no apogeu (ponto da órbita em que a distância é

máxima) a Lua parece ser 15% menor do que no perigeu (ponto de maior aproximação à Terra). Se um eclipse solar ocorre na primeira situação, a Lua não cobrirá todo o Sol, ocasionando um eclipse anular.

Sistemas de Medida de Tempo

Nas próximas seções vamos estudar em mais detalhe as diferentes formas de se medir o tempo com base no movimento diurno dos astros. Veremos que o movimento anual do Sol, que acabamos de estudar, leva a diferentes definições de hora solar. Veremos também a relação entre a hora local e a longitude do observador. Mas para atingirmos estes objetivos, faz-se necessário definirmos alguns conceitos que parecem e são simples, mas por vezes resultam em alguma confusão.

Instante, Hora, Intervalo e Estado de Cronômetro

Uma possível fonte de confusão está em saber diferenciar conceitos como instante, hora e intervalo de tempo e compreender exatamente o que se quer dizer com essas definições. Todos nós temos uma noção cotidiana do tempo. Podemos ordenar, de acordo com nossa capacidade de memória, fatos e acontecimentos em seqüência no tempo. Esta noção do tempo, baseada na nossa experiência do dia a dia, nos faz “sentir” o tempo como algo que “passa” ininterruptamente, levando a uma sucessão constante e linear de instantes. Não abandonemos, pois esta noção. Assim, definimos de forma genérica o tempo como uma variável cujo valor cresce de forma uniforme e que pode ser representada em um eixo. Um instante então pode ser entendido como um ponto ao longo do eixo do tempo. O valor numérico desta variável, o tempo, correspondente a cada instante nós chamamos de hora. Colocado de outra maneira, podemos identificar qualquer instante no eixo do tempo atribuindo-lhe um valor numérico que corresponde à hora naquele instante.

Mas há diferentes formas (ou sistemas) que podemos usar para atribuir uma hora a um dado instante. Ou seja, um determinado instante no tempo pode ser e é caracterizado por diferentes valores de hora. No Capítulo 1 definimos pelo menos dois sistemas de tempo, a cada um dos quais associamos uma determinada definição de hora: hora solar e hora sideral. Qualquer instante então é caracterizado por valores, em geral diferentes, de hora solar e de hora sideral.

Consideremos agora um outro conceito extremamente importante: o intervalo. Intervalo de tempo é a distância ao longo do eixo do tempo entre dois instantes. O valor do intervalo depende do sistema que estamos usando para marcar hora. O que veremos neste capítulo são justamente diferentes definições de hora (ou dizendo em outras palavras, diferentes sistemas de tempo) e como converter um intervalo de tempo de um sistema para outro.

Como marcamos a hora associada a um dado instante? Em geral, usa-se um cronômetro. Existem tanto cronômetros siderais, que marcam a hora sideral, quanto cronômetros comuns, marcando a hora solar. Nem sempre a leitura do cronômetro nos dá exatamente a hora nestes

sistemas. E isso nem é necessário, desde que saibamos converter a leitura feita no cronômetro em um dado instante (chamada de instante cronométrico, I) em hora sideral ou solar. A diferença entre a hora e o instante cronométrico é chamado de estado do cronômetro, E.

$$\text{Hora} = I + E$$

Por exemplo, $S = I_S + E_S$, onde S é a hora sideral num dado instante, I_S é a leitura feita em um cronômetro sideral neste instante e E_S é o estado deste cronômetro. Como determinar o estado de um cronômetro? Basta fazermos a leitura do instante cronométrico em um instante para o qual saibamos com precisão a hora. Por exemplo, ao observarmos uma estrela passar pelo nosso meridiano, sabemos que a hora sideral neste instante é igual à ascensão reta α da estrela: $S = \alpha$. Se neste instante o cronômetro indica I_S , seu estado será $E = S - I_S = \alpha - I_S$.

Conhecido o estado do cronômetro em um dado instante, espera-se que ele se mantenha constante, pelo menos por algum tempo. Este certamente seria o caso de um cronômetro perfeito. Na prática, há variações em E ao longo do tempo, que quantificam aquilo que chamamos de marcha (m) de um cronômetro:

$$m = \frac{\Delta E}{\Delta \text{Hora}}$$

Quanto menor a marcha, mais regular é o cronômetro, mais fácil, portanto será usá-lo para determinar a hora. Como veremos neste capítulo, a marcha de um relógio de césio, que mede o tempo atômico, é da ordem de $m = 1 / 1.000.000.000 = 10^{-9}$.

As Diferentes Definições de Hora

Vimos que, através da observação do movimento diurno dos astros, em especial pela determinação do ângulo horário, podemos medir o tempo. Vimos os conceitos de hora sideral e solar, baseadas, respectivamente, nos ângulos horários do ponto vernal (ponto γ) e do Sol.

$$S = H_\gamma$$

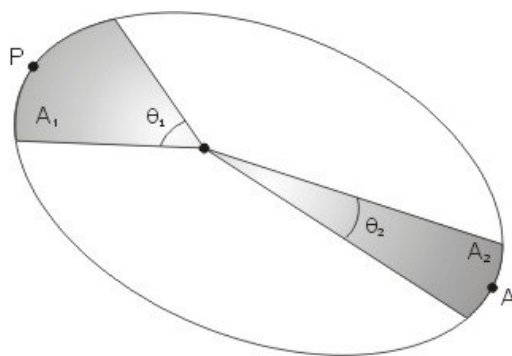
$$M = H_{\text{sol}} + 12\text{h}$$

Ou seja, à medida que a Terra rotaciona, variam os valores de ângulo horário tanto do ponto vernal quanto do Sol, variando, portanto os valores de hora sideral e solar. A cada instante no tempo, portanto, podemos atribuir um valor de cada uma destas definições de hora.

Nós já vimos também que, pelo fato de o Sol mover-se por entre as estrelas, ao longo da eclíptica e de oeste para leste, a uma taxa média de $360/365,25 = 0,9856^\circ$ por dia, o dia solar é mais longo do que o dia sideral. Ou seja, o intervalo entre duas culminações superiores sucessivas do Sol é de 3min 56,04s mais longo do que o intervalo entre duas culminações superiores sucessivas de uma estrela, pois o Sol está constantemente se deslocando no sentido contrário ao movimento diurno. Note que a hora que marcamos no relógio, como veremos a seguir, é ligada (mas não é

idêntica) à hora solar, de forma que outra maneira de dizer a mesma coisa é afirmar que uma dada estrela passa pelo meridiano de um observador 3min 56,04s “mais cedo” a cada dia (solar).

Na verdade, existem mais de uma definição de hora solar. O motivo é que o movimento do Sol ao longo da eclíptica não se dá uniformemente, ou seja, a velocidade angular com que o Sol se desloca ao longo da eclíptica varia com a época do ano. Isso porque o movimento do Sol ao longo da eclíptica é o reflexo do movimento orbital da Terra no espaço em torno dele. Sendo a órbita da Terra uma elipse, sua velocidade angular orbital varia, sendo maior no periélio e menor no afélio. Esta situação é bem representada na figura I.3.7, onde a elipse representa a órbita da Terra em torno do Sol. Este último, de acordo com a 1ª Lei de Kepler, se situa em um dos focos da órbita terrestre. O ponto P, de máxima aproximação ao Sol é o periélio, enquanto que o ponto A, de maior distância, é o afélio. Na figura vemos dois arcos, θ_1 e θ_2 , varridos pela Terra em sua órbita quando próxima do periélio e do afélio, respectivamente. Pela 2ª Lei de Kepler, sabemos que as áreas A_1 e A_2 varridas pela Terra são iguais se o intervalo de tempo decorrido ao varrê-las for o mesmo. Como próximo do periélio a distância Sol–Terra é mínima, a velocidade angular tem que ser máxima para manter constante a área varrida. Logo, o deslocamento angular do Sol sobre a eclíptica também é variável.



$$A_1 = A_2 \rightarrow \theta_1 > \theta_2$$

Figura I.3.7 – representação do movimento orbital terrestre em torno do Sol, com sua velocidade angular variável.

Claro que esta situação não é muito conveniente em termos de marcação da hora: não queremos ter dias com mais de 24h e outros com menos de 24h, seria muito confuso!

Para contornar este problema, definimos uma hora solar verdadeira (V) e uma hora solar média (M). Somente a primeira é baseada no ângulo horário do objeto luminoso que vemos no céu e que chamamos de Sol. A hora solar média é baseada no ângulo horário do Sol Médio. O Sol Médio é um sol imaginário, mais bem comportado do que o Sol verdadeiro. Sua velocidade angular de deslocamento no céu é constante e, portanto, seu ângulo horário varia uniformemente. Os valores de hora solar verdadeira, V, e média, M, são dados, portanto por:

$$V = H_V + 12h$$

$$M = H_M + 12h$$

onde H_V e H_M são, respectivamente, os ângulos horários do Sol verdadeiro e do Sol médio.

Outra definição importante de hora é a de tempo universal (TU). Tempo universal é simplesmente a hora solar média no meridiano de Greenwich (longitude $\lambda = 0^\circ$). Sabemos que a hora associada a um determinado instante no tempo, seja sideral ou solar, verdadeira ou média, não é a mesma em todos os pontos da Terra. Ela varia com a longitude, ou seja, com o meridiano. Isso é fácil de entender, uma vez que se um astro (sol verdadeiro, sol médio ou o ponto vernal) está passando pelo meridiano a uma dada longitude λ_1 , ele certamente não poderá estar passando pelo meridiano a uma longitude λ_2 , exceto se $\lambda_1 = \lambda_2$. Se em λ_1 , $H_M = 0^\circ$, por exemplo, em $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$, $H_M = \Delta\lambda$. Ou seja, a diferença de hora entre dois meridianos em um dado instante é igual à diferença de longitude entre os dois meridianos. Como dissemos, isso vale para qualquer sistema de medida de tempo.

A figura I.3.8 ilustra este fato, mostrando a Terra vista de cima da direção do pólo norte. Vemos na figura dois meridianos, de longitudes λ_1 e λ_2 , respectivamente. O círculo mais externo é a esfera celeste e nela estão indicadas a posição do ponto γ e do Sol Médio em um dado instante. O movimento diurno se dá no sentido horário, sendo, portanto nesta direção que contamos os valores de ângulo horário. Basta olhar para a figura para constatar que vale a igualdade:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \lambda_2 - \lambda_1 = H_2 - H_1 = M_2 - M_1 = \Delta M$$

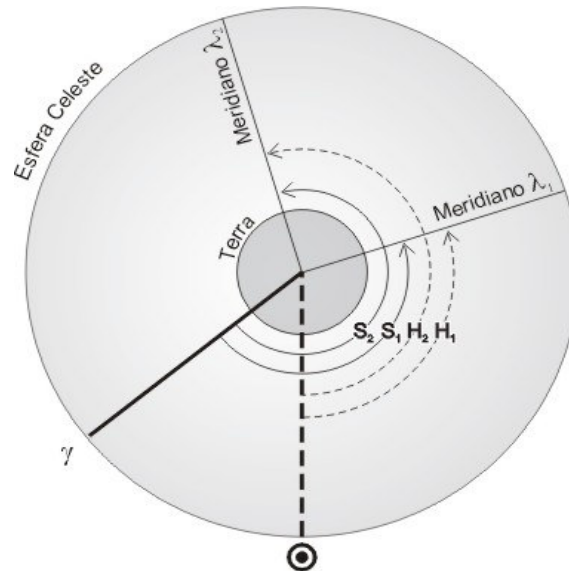


Figura I.3.8 – Posição de dois meridianos em um dado instante, com representação das horas sideral e solar de cada um.

Note que se arbitramos que a longitude cresce para oeste, sendo nula no meridiano de Greenwich, teremos que $\lambda_2 < \lambda_1$. Logo, é necessário modificar ligeiramente a relação entre diferença de hora e diferença de longitude:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \lambda_1 - \lambda_2 = H_2 - H_1 = M_2 - M_1 = \Delta M$$

A inversão na posição das longitudes na expressão acima faz com que uma diferença positiva de hora (meridiano λ_2 a leste de λ_1) corresponda a uma diferença positiva em longitude.

Dessa forma, podemos estabelecer uma relação simples entre a hora solar média M de um local cuja longitude é λ e a hora universal TU:

$$\Delta M = M - TU = 0^\circ - \lambda = -\lambda$$

Logo,

$$M = TU - \lambda$$

O sinal negativo resulta dessa nossa convenção de contar a longitude positivamente para oeste, de forma que pontos de longitude $\lambda > 0^\circ$ estão atrasados com relação ao meridiano de Greenwich. Por exemplo, se são 9h solares médias em Greenwich, $TU = 9h$, qual o valor de M no meridiano de longitude $\lambda = -75^\circ = -5h$? Trata-se de um meridiano a leste de Greenwich (longitude negativa), de forma que sua hora solar média tem que ser adiantada com relação a este último. Pela expressão acima, de fato teremos:

$$M = TU + 75^\circ = 9h + 5h = 14h$$

Qual a hora que marcamos no relógio? Essa pergunta procede, principalmente à medida que introduzimos cada vez mais sistemas de contagem do tempo. Resposta: a hora do relógio é a Hora Legal (HL). A Hora Legal é baseada no movimento do Sol Médio, mas obedece a várias conveniências geopolíticas. A hora solar média M varia continuamente com a longitude. Em outras palavras, a hora solar média no Rio de Janeiro é diferente da de São Paulo por alguns minutos, pois esta é a diferença de longitude entre os meridianos que passam pelas duas cidades. Não seria conveniente para o comércio, indústria, política, etc que os cariocas acordassem um pouco mais cedo, e comesçassem a e terminassem de trabalhar também um pouco mais cedo, simplesmente por que o Sol passa pelo seu meridiano astronômico alguns minutos antes do que pelo meridiano dos paulistas. Necessidades de se padronizar a hora em grandes regiões unidas econômica, cultural e politicamente levaram à definição de grandes faixas de longitude, chamadas de fusos horários (F), que compartilham de uma mesma hora legal. Pela convenção dos fusos horários, a superfície da Terra é dividida em 24 fusos, compreendendo um domínio de 15° de longitude cada. O primeiro fuso ($F = 0h$) é aquele cujo centro contém o meridiano de Greenwich ($\lambda = 0^\circ$). Contrariamente ao que fazemos com a longitude, a oeste (leste) de Greenwich os fusos são contados negativamente (positivamente). Uma representação esquemática dos fusos horários é dada pela figura I.3.9. Nela vemos, em linhas tracejadas, o meridiano de Greenwich, correspondente ao fuso $F = 0h$. Na direção leste temos contados os fusos positivos, até $F = +12h$, junto à linha de mudança de data. A oeste, temos os fusos negativos, sendo que novamente $F = -12h$ encontra-se imediatamente a leste da

linha internacional de mudança de data. São mostrados também na figura I.3.9 os valores de longitude dos meridianos centrais de cada fuso.

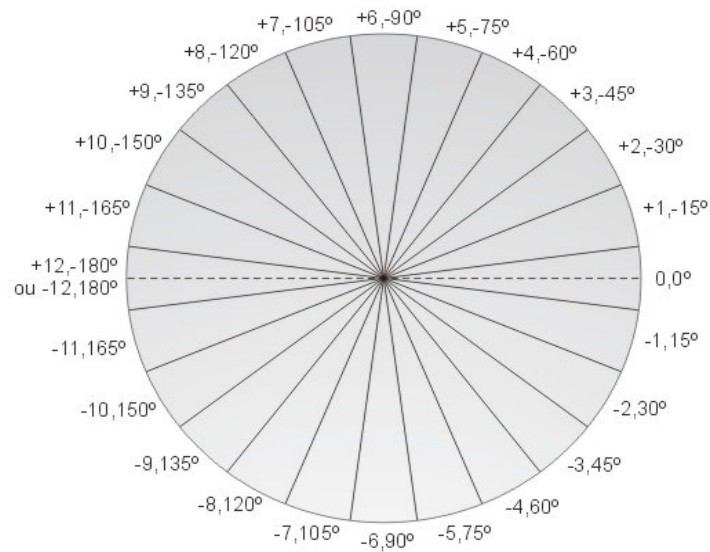


Figura I.3.9 – *Fusos horários e seus valores centrais de longitude.*

A maior parte da população brasileira está dentro do fuso $F = -3h$, cujo meridiano central é, portanto, o de longitude $\lambda = 3h \times 15^\circ/h = +45^\circ$. O domínio de valores de longitude contidos neste fuso horário é $37,5^\circ < \lambda < 52,5^\circ$. Já o primeiro fuso, cujo centro é o meridiano de Greenwich, contém o domínio $-7,5^\circ < \lambda < +7,5^\circ$.

Qual a relação entre a hora legal, que marcamos no relógio, e a hora solar média M ? Trata-se de uma relação muito simples, que apenas reflete a definição de hora legal como sendo a hora solar média no meridiano central de um fuso. Logo,

$$M - HL = \Delta M = -\Delta\lambda$$

$$M = HL - \Delta\lambda$$

onde $\Delta\lambda$ neste caso é simplesmente a diferença de longitude entre o meridiano do observador e o meridiano central do fuso horário em que este observador se situa. Considere o caso de um observador em Porto Alegre, cuja longitude é aproximadamente $\lambda_{POA} = 51^\circ$ (lembre-se que estamos sempre considerando longitudes como positivas a oeste de Greenwich). Como vimos, o centro do fuso $F = -3h$ corresponde a $\lambda = 45^\circ$. Logo, $\Delta\lambda = 51^\circ - 45^\circ = 6^\circ$. Esta diferença positiva em longitude significa que Porto Alegre está a oeste do meridiano central do fuso $F = -3$. Assim, a hora solar média em Porto Alegre está atrasada com relação a este último:

$$M = HL - 6^\circ = HL - 24 \text{ min.}$$

Se em um dado instante a hora legal no fuso de $-3h$ é $HL = 15h$, sabemos que a hora solar média no meridiano de Porto Alegre é $M_{POA} = 14h36min$. O ângulo horário do Sol médio com relação a este meridiano será então $H_{M,POA} = M_{POA} - 12h = 2h36min$.

Qual a relação entre hora legal HL em um dado meridiano de longitude λ e o tempo universal ? Esta relação é igualmente simples:

$$HL = TU + F$$

onde F é o fuso onde se situa o meridiano de longitude λ .

Também é fácil provar esta expressão, lembrando que a diferença $HL - TU$ nada mais é do que a diferença de hora solar média entre dois meridianos centrais, um no fuso F (de longitude λ_c) e outro em Greenwich ($\lambda = 0^\circ$). Logo:

$$\Delta M = HL - TU = 0^\circ - \lambda_c = F$$

Ou seja, no instante em que são $15h$ no fuso que contém a maior partes do território brasileiro ($F = -3h$), a hora universal será $TU = HL - F = 15h + 3h = 18h$.

O tempo sidereal também pode ser definido de mais de uma maneira. Veremos mais adiante que a posição do ponto γ não é rigorosamente fixa entre as estrelas, devido a vários efeitos seculares como a precessão e a nutação. Se considerarmos apenas a variação de posição do ponto vernal causada pela precessão, falamos em ponto vernal médio. Se incorporarmos os efeitos de nutação, teremos então o ponto vernal verdadeiro ou aparente. Assim, podemos falar de hora sidereal média ou verdadeira. A diferença entre ambas é chamada de equação dos equinócios (q):

$$q = S_V - S_M = H_{\gamma V} - H_{\gamma M}$$

Tanto a hora solar quanto a sidereal são exemplos de sistemas de medida de tempo baseados no movimento de rotação da Terra. São, portanto, chamados de sistemas rotacionais de medida de tempo. Mas existem maneiras de se contar o tempo que não dependem da posição de algum astro no céu com relação ao meridiano do observador. O tempo atômico, por exemplo, não é rotacional, já que é baseado nas transições atômicas de átomos de Césio 133. No intervalo de um segundo de tempo atômico ocorrem 9.192.631.770 transições de átomos de Ce_{133} entre dois níveis hiperfinos de sua energia interna. Essa é a definição mais moderna de 1s.

Os sistemas rotacionais sofrem de algumas irregularidades, algumas delas previsíveis outras não. O movimento do pólo, por exemplo, afeta a longitude de qualquer ponto na superfície da Terra, o que se reflete no ângulo horário do Sol ou do ponto vernal (ver Capítulo 4). Além disso, a velocidade angular de rotação da Terra não é uniforme. Há uma lenta tendência de desaceleração da rotação, causada pelo atrito da massa líquida do planeta, que tende a se alinhar com a Lua e o Sol devido às marés, com a parte sólida. Além disso, há variações sazonais, provavelmente causadas por mudanças meteorológicas, na rotação do planeta. Finalmente há componentes irregulares na variação da rotação, ainda não explicados de maneira satisfatória.

Diante das irregularidades mencionadas acima, podemos na verdade definir 3 tipos de sistemas de tempo universal:

1. TU0

Baseado apenas no valor do ângulo horário do Sol Médio medido por um observador no meridiano de Greenwich.

2. TU1

TU0 corrigido para o efeito de variação da longitude, $\Delta\lambda$, causado pelo movimento do pólo (ver Capítulo 4):

$$TU1 = TU0 + \Delta\lambda$$

3. TU2

TU1 corrigido para as variações sazonais na velocidade angular de rotação da Terra, ω :

$$TU2 = TU1 + \frac{\Delta\omega(^{\circ})}{15}$$

Já o tempo atômico é muito mais regular do que qualquer sistema rotacional de medida de tempo. A regularidade da contagem do tempo usando transições de átomos de Césio, por exemplo, é da ordem de 1 parte em 1 bilhão. Ou seja, após 1 bilhão de segundos (mais de 30 anos), a incerteza na contagem do tempo atômico é de apenas um segundo. Por outro lado, o tempo atômico não está diretamente sintonizado com a posição do Sol no céu. Assim, a discrepância entre o tempo atômico e o tempo rotacional tende a aumentar com o passar do tempo. Para evitar uma desvinculação muito grande entre o tempo atômico e o solar, faz-se necessária a definição do tempo universal coordenado (TUC). O TUC é um sistema de tempo atômico que sofre correções periódicas para manter-se em consonância com o tempo universal, mais especificamente com o TU1.

Existem ainda outros sistemas de tempo. O tempo das efemérides, por exemplo, é a variável independente que entra nas expressões que nos dão a posição de planetas e de seus satélites em algum sistema de coordenadas conveniente, como o sistema de coordenadas eclípticas. À medida que somos capazes de formular modelos mais sofisticados para descrever os movimentos de planetas em torno do Sol e de satélites em torno de seus planetas, o tempo das efemérides se torna mais fácil de ser obtido, sendo também uma medida de tempo independente da rotação da Terra.

Conversão entre Sistemas de Medida de Tempo

Sabemos que um dia solar médio tem 24h solares de duração, cada hora solar dividida em 60min (solares) e 3.600s (solares). Estes são os intervalos de tempo usado em nossa vida cotidiana. Expresso nessas unidades, o dia sideral tem uma duração de 23h 56min 04,090538s. Mas podemos definir intervalos como hora, minuto e segundo siderais, de forma que o dia sideral tenha 24h siderais. Claro que a unidade de tempo sideral necessariamente será sempre mais curta do que a

unidade solar. Uma questão importante e recorrente em determinações astronômicas é a de como converter intervalos de tempo expressos em unidades siderais em solares ou vice versa.

Conversão de tempo solar em sideral

Suponha que tenhamos um intervalo ΔS de tempo sideral. Queremos saber qual o valor ΔM deste intervalo em unidades de tempo solar.

Para melhor entendermos por que o mesmo intervalo tem valor numericamente maior em unidades siderais do que solares médias, basta lembrarmos que o tempo é baseado, em ambos os sistemas, em valores de ângulo horário: do ponto γ (Sol Médio) no caso do sistema sideral (solar médio).

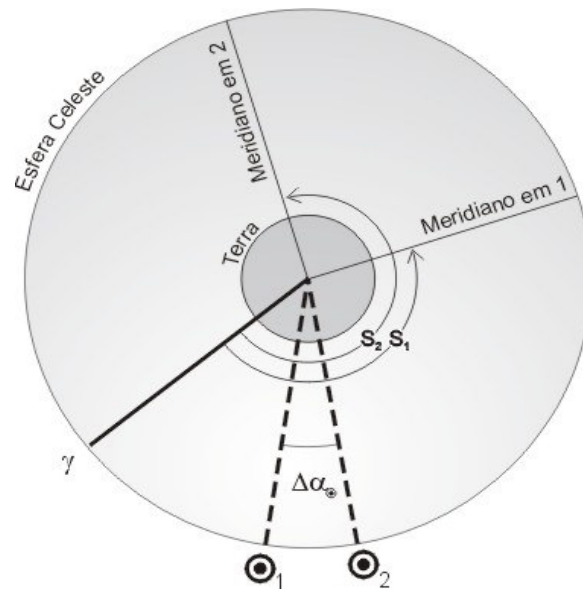


Figura I.3.10 – *Diferença entre os valores associados a um intervalo de tempo nos sistemas solar e sideral.*

Na figura I.3.10 mostramos o intervalo, expresso em unidades siderais, $\Delta S = S_2 - S_1$ decorrido entre dois instantes no tempo. Neste intervalo, o meridiano de um observador, devido à rotação da Terra, varreu exatamente este ângulo ΔS no espaço. Isso porque o observador é móvel, enquanto o ponto vernal pode ser considerado como fixo na esfera celeste durante o intervalo. Já a posição do Sol Médio, se deslocará ligeiramente para leste, devido ao movimento anual do Sol. Sua ascensão reta aumentará então por $\Delta\alpha(^{\circ}) = \Delta S(^{\circ}) / 366,25$, onde 366,25 é o número de dias siderais no ano. Assim, o valor do mesmo intervalo em unidade solares médias, ΔM , será menor:

$$\Delta M = \Delta S - \Delta\alpha = \Delta S \left(1 - \frac{1}{366,25}\right) = \Delta S (1 - 0,00273043359) = \Delta S (1 - \mu)$$

onde:

$$\mu = \frac{1}{366,25} = 0,00273043359.$$

O mesmo fator de conversão pode ser obtido lembrando que um dia sideral tem 24h siderais, mas apenas 23h 56min 04,090538s solares médios. Logo, temos a regra de proporcionalidade:

$$\frac{\Delta S}{\Delta M} = \frac{24h}{23h56\text{ min }04s} = 1,00273790926 = 1 + \eta$$

onde:

$$\eta = 0,00273790926.$$

Note que é válida a relação:

$$(1 + \eta)(1 - \mu) = 1$$

Assim, se conhecemos a hora sideral em um dado meridiano em um determinado instante, S_0 , e desejamos conhecer a hora sideral S no mesmo meridiano decorrido um intervalo em hora solar igual a ΔM , teremos:

$$\frac{\Delta S}{\Delta M} = 1 + \eta \rightarrow \Delta S = S - S_0 = (1 + \eta)\Delta M$$

$$S = S_0 + (1 + \eta)\Delta M$$

É comum, por exemplo, querermos conhecer a hora sideral S às M horas solares médias locais em um determinado meridiano de longitude λ . Sabemos que se são M horas solares médias locais a esta longitude, o tempo universal neste instante será $TU = (M + \lambda)$ (como de hábito adotamos a convenção de que $\lambda > 0^\circ$ a oeste de Greenwich e $\lambda < 0^\circ$ a leste de Greenwich). Das efemérides (do ON ou do *Astronomical Almanac*, por exemplo) podemos ler a hora sideral S_0 em Greenwich correspondente a $TU = 0h$ para o dia em questão. Em unidades solares médias, ter-se-ão decorrido $(M + \lambda)$ horas desde este instante. O intervalo em horas siderais correspondente será, portanto:

$$\Delta S = \Delta M (1 + \eta) = (M + \lambda) (1 + \eta)$$

A hora sideral em Greenwich, S_G , no instante desejado será, portanto:

$$S_G = S_0 + \Delta S = S_0 + (M + \lambda)(1 + \eta)$$

Mas queremos a hora sideral S no meridiano de longitude λ e não em Greenwich ($\lambda = 0^\circ$). Precisamos então subtrair a diferença em longitude:

$$S = S_G - \lambda = S_0 + (M + \lambda)(1 + \eta) - \lambda = S_0 + (M + \lambda)\eta + M \quad \text{equação (1)}$$

A expressão acima nos dá exatamente o que queríamos: a hora sideral em um meridiano de longitude dada e no instante em que a hora solar média local é M . Como já mencionado, o valor de S_0 , a hora sideral em Greenwich ($\lambda = 0^\circ$) à $TU = 0h$ é listada, dia a dia no ano, no Anuário Astronômico do Observatório Nacional (ON) ou no *Astronomical Almanac*.

Tabela do Anuário Astronômico do Observatório Nacional

Na figura I.3.11 vê-se que a primeira coluna da esquerda lista o mês e o dia do ano. A coluna seguinte lista o valor da hora sideral para $\lambda = 0^\circ$ (Greenwich) à TU = 0h, a que chamamos de S_0 . São mostradas tanto as horas siderais aparente quanto a média. A diferença entre as duas, chamada de equação dos equinócios é dada a seguir. Seguem-se então o valor da obliquidade da eclíptica e os termos de nutação de longo e curto período, tanto perpendicular quanto ao longo da eclíptica (ver Capítulo 4).

4 F TEMPO SIDERAL, OBLIQUIDADE DA ECLÍPTICA E NUTAÇÃO, 2001
0 HORA TEMPO UNIVERSAL

DATA M TU	TEMPO SIDERAL				EQ. EQUIN.		OBLIQ.	NUT. OBLIQ.		NUT. LONG.	
	APARENTE		MÉDIO		LONGO	CURTO	ECLIP.	LONGO	CURTO	LONGO	CURTO
	H	M	S	S	S	S	G ' 23 26	"	"	"	"
FEV. 10	9	20	32.734	33.672	-0.949	-0.011	19.010	-1.953	+0.073	-15.520	-.187
11	9	24	29.283	30.227	-0.950	+0.006	19.039	-1.926	-0.095	-15.533	-.104
12	9	28	25.832	26.782	-0.951	+0.001	19.084	-1.898	-0.094	-15.547	-.012
13	9	32	22.382	23.338	-0.952	-0.004	19.089	-1.871	+0.073	-15.563	-.065
14	9	36	18.933	19.893	-0.953	-0.007	19.080	-1.844	+0.039	-15.580	-.110
15	9	40	15.487	16.448	-0.954	-0.007	19.067	-1.817	+0.000	-15.599	-.118
16	9	44	12.043	13.004	-0.955	-0.006	19.057	-1.791	-0.035	-15.620	-.090
17	9	48	8.600	9.559	-0.957	-0.002	19.056	-1.765	-0.061	-15.642	-.041
18	9	52	5.158	6.115	-0.958	+0.002	19.066	-1.739	-0.075	-15.665	-.025
19	9	56	1.716	2.670	-0.960	-0.006	19.091	-1.714	-0.075	-15.689	+0.091
20	9	59	58.273	59.225	-0.961	+0.009	19.128	-1.689	-0.061	-15.715	+0.146
21	10	3	54.829	55.781	-0.963	+0.011	19.175	-1.664	-0.037	-15.743	+0.180
22	10	7	51.383	52.336	-0.965	+0.011	19.229	-1.640	-0.006	-15.771	+0.185
23	10	11	47.935	48.891	-0.966	+0.010	19.284	-1.616	+0.026	-15.801	+0.158
24	10	15	44.485	45.447	-0.968	-0.006	19.334	-1.593	+0.054	-15.832	+0.101
25	10	19	41.033	42.002	-0.970	+0.001	19.374	-1.570	+0.072	-15.865	+0.021
26	10	23	37.581	38.550	-0.972	-0.004	19.400	-1.548	+0.078	-15.898	-0.070
27	10	27	34.129	35.113	-0.975	-0.010	19.411	-1.526	+0.068	-15.933	-.159
28	10	31	30.677	31.668	-0.977	-0.014	19.407	-1.504	+0.044	-15.968	-.230
MAR. 1	10	35	27.228	28.224	-0.979	-0.016	19.392	-1.484	+0.009	-16.005	-.269
2	10	39	23.781	24.779	-0.981	-0.016	19.371	-1.463	-0.030	-16.043	-.266
3	10	43	20.337	21.334	-0.984	-0.013	19.354	-1.444	-0.067	-16.081	-.216
4	10	47	16.896	17.890	-0.986	-0.008	19.347	-1.425	-0.091	-16.121	-.127
5	10	51	13.456	14.445	-0.988	-0.001	19.360	-1.406	-0.096	-16.161	-.013
6	10	55	10.016	11.000	-0.991	-0.006	19.395	-1.388	-0.077	-16.202	+0.100
7	10	59	6.573	7.556	-0.994	+0.011	19.449	-1.371	-0.039	-16.244	+0.184
8	11	3	3.128	4.111	-0.996	+0.013	19.513	-1.354	+0.009	-16.286	-.217
9	11	6	59.680	60.667	-0.999	+0.012	19.574	-1.338	+0.056	-16.329	+0.194
10	11	10	56.228	57.222	-1.001	-0.008	19.620	-1.322	+0.088	-16.373	+0.124
11	11	14	52.775	53.777	-1.004	-0.002	19.643	-1.307	+0.097	-16.417	+0.032
12	11	18	49.322	50.333	-1.007	-0.003	19.642	-1.293	+0.083	-16.462	-.054
13	11	22	45.871	46.888	-1.010	-0.007	19.624	-1.280	-0.053	-16.507	-.112
14	11	26	42.423	43.443	-1.012	-0.008	19.596	-1.267	-0.014	-16.553	-.131
15	11	30	38.977	39.996	-1.015	-0.007	19.569	-1.255	-0.025	-16.599	-.111
16	11	34	35.532	36.554	-1.018	-0.004	19.549	-1.243	-0.055	-16.645	-.062
17	11	38	32.089	33.109	-1.021	-0.000	19.540	-1.232	-0.073	-16.691	+0.006
18	11	42	28.646	29.665	-1.024	+0.005	19.546	-1.222	-0.077	-16.738	+0.077
19	11	46	25.202	26.220	-1.027	+0.009	19.564	-1.212	-0.067	-16.784	+0.140
20	11	50	21.757	22.776	-1.029	+0.011	19.594	-1.204	-0.044	-16.831	+0.182
21	11	54	18.311	19.331	-1.032	+0.012	19.631	-1.195	-0.014	-16.876	+0.195
22	11	58	14.862	15.886	-1.035	+0.011	19.670	-1.188	+0.018	-16.924	+0.177
23	12	2	11.411	12.442	-1.038	+0.008	19.706	-1.181	+0.049	-16.971	+0.128

Figura I.3.11 – Tabela do Anuário Astronômico do Observatório Nacional

Tabela do Astronomical Almanac

Na figura I.3.12 vê-se que a primeira coluna da esquerda lista o mês e o dia do ano. A coluna seguinte lista a data Juliana. O valor da hora sideral para $\lambda = 0^\circ$ (Greenwich) à TU = 0h vem em seguida. São mostradas tanto as horas siderais aparente quanto a média. A diferença entre as

duas, chamada de equação dos equinócios é dada a seguir. O valor de hora universal no instante em que o equinócio médio cruza o meridiano de Greenwich a cada dia é listado na última coluna à direita.

UNIVERSAL AND SIDEREAL TIMES, 2001										B9
Date	Julian	G. SIDEREAL TIME			Equation of	GSD	UT at 0 ^h GMST			
0 ^h UT	Date	(GHA of the Equinox)			Equinoxes	at	(Greenwich Transit of			
		Apparent	Mean		at 0 ^h UT	0 ^h GMST	the Mean Equinox)			
		h m s	s		s		h m s			
Feb. 15	1955-5	9 40 15-5711	16-5269	—0-9559	8670-0	Feb. 15	14 17 22-6278			
16	1956-5	9 44 12-1270	13-0823	—0-9553	8671-0	16	14 13 26-7183			
17	1957-5	9 48 08-6845	09-6377	—0-9531	8672-0	17	14 09 30-8089			
18	1958-5	9 52 05-2429	06-1931	—0-9501	8673-0	18	14 05 34-8994			
19	1959-5	9 56 01-8013	02-7484	—0-9471	8674-0	19	14 01 38-9899			
20	1960-5	9 59 58-3588	59-3038	—0-9450	8675-0	20	13 57 43-0805			
21	1961-5	10 03 54-9147	55-8592	—0-9444	8676-0	21	13 53 47-1710			
22	1962-5	10 07 51-4687	52-4145	—0-9458	8677-0	22	13 49 51-2615			
23	1963-5	10 11 48-0204	48-9699	—0-9495	8678-0	23	13 45 55-3520			
24	1964-5	10 15 44-5700	45-5253	—0-9552	8679-0	24	13 41 59-4426			
25	1965-5	10 19 41-1180	42-0806	—0-9626	8680-0	25	13 38 03-5331			
26	1966-5	10 23 37-6651	38-6360	—0-9709	8681-0	26	13 34 07-6236			
27	1967-5	10 27 34-2123	35-1914	—0-9791	8682-0	27	13 30 11-7142			
28	1968-5	10 31 30-7606	31-7467	—0-9862	8683-0	28	13 26 15-8047			
Mar. 1	1969-5	10 35 27-3110	28-3021	—0-9911	8684-0	Mar. 1	13 22 19-8952			
2	1970-5	10 39 23-8642	24-8575	—0-9933	8685-0	2	13 18 23-9858			
3	1971-5	10 43 20-4205	21-4128	—0-9924	8686-0	3	13 14 28-0763			
4	1972-5	10 47 16-9794	17-9682	—0-9888	8687-0	4	13 10 32-1668			
5	1973-5	10 51 13-5400	14-5236	—0-9836	8688-0	5	13 06 36-2574			
6	1974-5	10 55 10-1004	11-0789	—0-9785	8689-0	6	13 02 40-3479			
7	1975-5	10 59 06-6589	07-6343	—0-9754	8690-0	7	12 58 44-4384			
8	1976-5	11 03 03-2139	04-1897	—0-9758	8691-0	8	12 54 48-5289			
9	1977-5	11 06 59-7648	60-7450	—0-9802	8692-0	9	12 50 52-6195			
10	1978-5	11 10 56-3126	57-3004	—0-9878	8693-0	10	12 46 56-7100			
11	1979-5	11 14 52-8587	53-8558	—0-9970	8694-0	11	12 43 00-8005			
12	1980-5	11 18 49-4053	50-4111	—1-0058	8695-0	12	12 39 04-8911			
13	1981-5	11 22 45-9539	46-9665	—1-0126	8696-0	13	12 35 08-9816			
14	1982-5	11 26 42-5051	43-5219	—1-0168	8697-0	14	12 31 13-0721			
15	1983-5	11 30 39-0589	40-0773	—1-0183	8698-0	15	12 27 17-1627			
16	1984-5	11 34 35-6148	36-6326	—1-0178	8699-0	16	12 23 21-2532			
17	1985-5	11 38 32-1719	33-1880	—1-0161	8700-0	17	12 19 25-3437			
18	1986-5	11 42 28-7292	29-7434	—1-0141	8701-0	18	12 15 29-4343			
19	1987-5	11 46 25-2859	26-2987	—1-0128	8702-0	19	12 11 33-5248			
20	1988-5	11 50 21-8412	22-8541	—1-0129	8703-0	20	12 07 37-6153			
21	1989-5	11 54 18-3945	19-4095	—1-0149	8704-0	21	12 03 41-7058			
22	1990-5	11 58 14-9458	15-9648	—1-0190	8705-0	22	11 59 45-7964			
23	1991-5	12 02 11-4949	12-5202	—1-0253	8706-0	23	11 55 49-8869			
24	1992-5	12 06 08-0424	09-0756	—1-0332	8707-0	24	11 51 53-9774			
25	1993-5	12 10 04-5887	05-6309	—1-0422	8708-0	25	11 47 58-0680			
26	1994-5	12 14 01-1350	02-1863	—1-0513	8709-0	26	11 44 02-1585			
27	1995-5	12 17 57-6822	58-7417	—1-0594	8710-0	27	11 40 06-2490			
28	1996-5	12 21 54-2315	55-2970	—1-0655	8711-0	28	11 36 10-3396			
29	1997-5	12 25 50-7837	51-8524	—1-0687	8712-0	29	11 32 14-4301			
30	1998-5	12 29 47-3389	48-4078	—1-0689	8713-0	30	11 28 18-5206			
31	1999-5	12 33 43-8968	44-9631	—1-0663	8714-0	31	11 24 22-6112			
Apr. 1	2000-5	12 37 40-4565	41-5185	—1-0620	8715-0	Apr. 1	11 20 26-7017			
2	2001-5	12 41 37-0166	38-0739	—1-0573	8716-0	2	11 16 30-7922			

Figura I.3.12 – Tabela do Astronomical Almanac.

A fórmula acima é bastante geral. Suponha que queiramos simplesmente a hora sideral em Greenwich a uma hora solar média local M . Como se trata do meridiano de Greenwich, a hora solar média local é também a hora universal: $TU = M$. Além disso, $\lambda = 0h$. Logo, a hora sideral desejada será:

$$S = S_0 + M(1+\eta)$$

onde S_0 é a hora sideral em Greenwich à 0h TU (que pode ser encontrada em Efemérides) e $\eta = 0,00273790926$.

Outro exemplo: provar que a hora sideral S em um meridiano de longitude λ à $M = 0h$ solar média local é dada por:

$$S = S_0 + \lambda\eta$$

onde, como sempre, S_0 é a hora sideral em Greenwich a $TU = 0h$.

Consideremos ainda uma situação, bastante comum, em que temos que escolher uma estrela para observação em um determinado dia e intervalo de hora legal. A ocasião mais favorável para observarmos uma estrela é, em geral, próxima do instante de sua culminação superior, quando sua altura no céu é máxima. Suponha que tenhamos o intervalo de hora legal compreendido entre HL_1 e HL_2 ($HL_2 > HL_1$) para a observação. Inicialmente temos que converter hora legal HL em hora solar média local M . Como vimos, a diferença entre as duas será igual à diferença entre a nossa longitude, λ , e a longitude do meridiano central do fuso horário em que nos encontramos, λ_c .

$$M_1 - HL_1 = \lambda_c - \lambda \rightarrow M_1 = HL_1 + \lambda_c - \lambda$$

$$M_2 - HL_2 = \lambda_c - \lambda \rightarrow M_2 = HL_2 + \lambda_c - \lambda$$

Os valores de hora sideral S_1 e S_2 , correspondentes, respectivamente, a M_1 e M_2 , serão dados pela expressão da equação (1), sendo que o valor de S_0 , a hora sideral em Greenwich à $TU = 0h$, é sempre tirado das efemérides. Como sabemos que a culminação de uma estrela ocorre à hora sideral igual à sua ascensão reta, α , temos que escolher nosso alvo usando o critério em ascensão reta $S_1 < \alpha < S_2$.

Conversão de tempo sideral em solar

Suponha agora que queiramos fazer o inverso: determinar a hora solar média local, M , dada a hora sideral S num dado instante. Basta resolvermos a equação (1) para M :

$$M = \frac{S - S_0 - \lambda\eta}{1 + \eta}$$

como:

$$1 - \mu = \frac{1}{1 + \eta},$$

$$M = (S - S_0 - \lambda\eta) (1 - \mu)$$

onde:

$$\mu = 0,00273043359.$$

Equação do Tempo

A rotação da Terra nos proporciona uma unidade natural de tempo: o dia. Vimos que podemos definir o dia solar, por exemplo, como o intervalo entre duas passagens meridianas do Sol. Já o dia sideral é o intervalo decorrido entre duas passagens meridianas de uma estrela. Vimos que em um dia, solar ou sideral, o ângulo horário do astro usado como referência varia de 0° a 360° (ou de $0h$ a $24h$).

Na prática, se medirmos, com um cronômetro ou relógio, a duração do dia solar, notaremos que ela varia. Em outras palavras, o dia solar não tem uma duração fixa. Já discutimos a causa desta variação na duração do dia solar: entre outras coisas, ela se deve ao fato de que o Sol caminha ao longo da eclíptica com velocidade variável; quando a Terra está no periélio (ou seja, sua distância ao Sol é mínima), a velocidade angular do Sol sobre a eclíptica é máxima, fazendo com que o dia solar seja de maior duração. Já quando a Terra está no afélio, a velocidade angular do Sol na eclíptica é mínima, o que torna o dia solar igualmente mínimo. Outro motivo que explica a variação observada do dia solar é o de que a hora solar depende do ângulo horário do Sol, H_{sol} , medido portanto ao longo do equador celeste. Mas o movimento do Sol se dá sobre a eclíptica. Assim, mesmo que sua velocidade angular ao longo desta última fosse constante, sua projeção sobre o equador celeste não o seria.

Um dia solar que não seja sempre de 24h não é muito conveniente para regular a vida das pessoas. A solução para este problema, como já discutido, foi definir um Sol Médio. O Sol Médio é bem comportado: ele caminha com velocidade angular constante e sobre o equador celeste. Assim, duas culminações superiores do Sol Médio estarão sempre separadas no tempo pelo mesmo intervalo, chamado de dia solar médio. Este tem sempre a duração de 24h tais como contadas por um cronômetro ou relógio comuns. A diferença entre o dia solar verdadeiro e o médio é chamada de equação do tempo. Na figura I.3.13 vemos a equação do tempo graficada ao longo do ano.

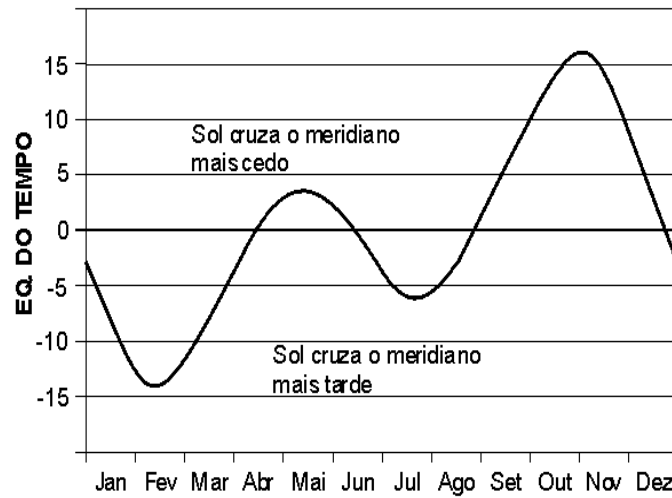


Figura I.3.13 – Gráfico de $\alpha_{\text{sol med}} - \alpha_{\text{sol ver}} (= -E)$ em função da época do ano.

Vemos, portanto, que a equação do tempo atinge valores de mais do que 15 minutos em determinadas épocas do ano. Geralmente representamos a equação do tempo pela letra E (às vezes usa-se o equivalente grego ϵ). De qualquer forma não confunda equação do tempo com estado de um cronômetro apenas porque usamos a mesma notação! Matematicamente temos que:

$$E = H_{\text{sol med}} - H_{\text{sol ver}} = \alpha_{\text{sol ver}} - \alpha_{\text{sol med}}$$

Na verdade, de acordo com esta definição, o gráfico acima representa $-E$, pois quando o Sol verdadeiro cruza o meridiano mais cedo (antes do meio-dia, $M=12h$), sabemos que $H_{\text{sol ver}} > H_{\text{sol med}}$. A segunda igualdade acima resulta do fato de que a hora sideral pode ser expressa tanto com o Sol Médio quanto com o Verdadeiro: $S = H_{\text{sol ver}} + \alpha_{\text{sol ver}} = H_{\text{sol med}} + \alpha_{\text{sol med}}$.

Os valores de E também podem ser encontrados nas efemérides astronômicas:

Tabela do Anuário Astronômico do ON contendo os valores da Equação do Tempo

Na *Figura I.3.14*, a primeira coluna lista o mês e o dia do ano. Seguem-se a ascensão reta e declinação do Sol verdadeiro, sua distância à Terra e seu raio angular. A equação do tempo é dada indiretamente pela última coluna, a qual lista a hora solar média (TU) em que o Sol verdadeiro cruza o meridiano de Greenwich ($\lambda = 0^\circ$). O valor de E para este instante, portanto, será a diferença entre o valor listado e 12h.

SOL, 2001													5 C
O HORA TEMPO TERRESTRE													
DATA	ASCENSÃO RETA			DECLINAÇÃO			DISTÂNCIA À TERRA		SEMI- DIAMETRO		PASS. MERID. GREENWICH.		
	H	M	S	G	'	"			'	"	H	M	S
FEV. 10	21	34	45.84	-14	23	51.7	0.986	7856	16	12.50	12	14	13.46
11	21	38	42.89	14	4	17.2	.986	9697	16	12.31	12	14	13.57
12	21	42	39.19	13	44	28.7	.987	1589	16	12.13	12	14	12.94
13	21	46	34.74	13	24	26.5	.987	3529	16	11.94	12	14	11.57
14	21	50	29.57	13	4	11.1	.987	5513	16	11.74	12	14	9.49
15	21	54	23.69	-12	43	43.0	0.987	7537	16	11.54	12	14	6.69
16	21	58	17.10	12	23	2.4	.987	9598	16	11.34	12	14	3.18
17	22	2	9.82	12	2	9.8	.988	1693	16	11.13	12	13	58.99
18	22	6	1.85	11	41	5.7	.988	3819	16	10.93	12	13	54.12
19	22	9	53.21	11	19	50.4	.988	5973	16	10.71	12	13	48.59
20	22	13	43.91	-10	58	24.4	0.988	8152	16	10.50	12	13	42.40
21	22	17	33.95	10	36	48.1	.989	0355	16	10.28	12	13	35.56
22	22	21	23.36	10	15	1.9	.989	2579	16	10.07	12	13	28.09
23	22	25	12.14	9	53	6.2	.989	4824	16	9.85	12	13	20.01
24	22	29	0.30	9	31	1.5	.989	7087	16	9.62	12	13	11.31
25	22	32	47.86	-9	8	48.2	0.989	9368	16	9.40	12	13	2.03
26	22	36	34.84	8	46	26.7	.990	1668	16	9.18	12	12	52.16
27	22	40	21.24	8	23	57.3	.990	3985	16	8.95	12	12	41.73
28	22	44	7.08	8	1	20.6	.990	6321	16	8.72	12	12	30.75
MAR. 1	22	47	52.38	7	38	36.9	.990	8676	16	8.49	12	12	19.23
2	22	51	37.16	-7	15	46.7	0.991	1052	16	8.26	12	12	7.20
3	22	55	21.43	6	52	50.3	.991	3451	16	8.02	12	11	54.66
4	22	59	5.21	6	29	48.1	.991	5875	16	7.79	12	11	41.64
5	23	2	48.52	6	6	40.7	.991	8327	16	7.55	12	11	28.16
6	23	6	31.38	5	43	28.3	.992	0808	16	7.31	12	11	14.23
7	23	10	13.80	-5	20	11.4	0.992	3322	16	7.06	12	10	59.89
8	23	13	55.80	4	56	50.4	.992	5870	16	6.81	12	10	45.14
9	23	17	37.42	4	33	25.6	.992	8455	16	6.56	12	10	30.03
10	23	21	18.67	4	9	57.3	.993	1076	16	6.31	12	10	14.56
11	23	24	59.59	3	46	26.0	.993	3732	16	6.05	12	9	58.77
12	23	28	40.20	-3	22	51.9	0.993	6422	16	5.79	12	9	42.69
13	23	32	20.52	2	59	15.4	.993	9143	16	5.52	12	9	26.33
14	23	36	0.58	2	35	36.8	.994	1892	16	5.25	12	9	9.72
15	23	39	40.41	2	11	56.5	.994	4664	16	4.98	12	8	52.88
16	23	43	20.01	1	48	14.9	.994	7457	16	4.71	12	8	35.83
17	23	46	59.42	-1	24	32.3	0.995	0267	16	4.44	12	8	18.59
18	23	50	38.65	1	0	49.2	.995	3091	16	4.17	12	8	1.18
19	23	54	17.72	0	37	5.7	.995	5925	16	3.89	12	7	43.63
20	23	57	56.65	-0	13	22.4	.995	8766	16	3.62	12	7	25.94
21	0	1	35.45	+0	10	20.3	.996	1611	16	3.34	12	7	8.14
22	0	5	14.15	+0	34	2.2	0.996	4459	16	3.07	12	6	50.24
23	0	8	52.76	+0	57	42.8	0.996	7306	16	2.79	12	6	32.27

Figura I.3.14 – Tabela do Anuário Astronômico do ON contendo os valores da Equação do Tempo.

Tabela do Astronomical Almanac contendo os valores da Equação do Tempo

Na Figura I.3.15, a primeira coluna lista o mês e o dia do ano. A penúltima coluna lista o raio angular do Sol. A equação do tempo é dada indiretamente pela última coluna, a qual lista a hora solar média (TU) em que o Sol verdadeiro cruza o meridiano de Greenwich ($\lambda = 0^\circ$). O valor de E para este instante, portanto, será a diferença entre o valor listado e 12h.

SUN, 2001							C7
FOR 0 ^h TERRESTRIAL TIME							
Date	Position Angle of Axis <i>P</i>	Heliographic		H. P.	Semi- Diameter	Ephemeris Transit	
		Latitude <i>B_s</i>	Longitude <i>L_s</i>				
Feb.	15	− 17.43	− 6.84	344.75	8.90	16 11.54	12 14 06.60
	16	− 17.76	− 6.88	331.58	8.90	16 11.34	12 14 03.10
	17	− 18.09	− 6.92	318.41	8.90	16 11.13	12 13 58.91
	18	− 18.41	− 6.96	305.25	8.90	16 10.93	12 13 54.04
	19	− 18.72	− 6.99	292.08	8.90	16 10.71	12 13 48.50
	20	− 19.03	− 7.02	278.91	8.89	16 10.50	12 13 42.31
	21	− 19.34	− 7.05	265.74	8.89	16 10.28	12 13 35.48
	22	− 19.64	− 7.08	252.57	8.89	16 10.07	12 13 28.01
	23	− 19.93	− 7.11	239.40	8.89	16 09.85	12 13 19.92
	24	− 20.21	− 7.13	226.23	8.89	16 09.62	12 13 11.23
	25	− 20.49	− 7.16	213.06	8.88	16 09.40	12 13 01.94
	26	− 20.77	− 7.17	199.89	8.88	16 09.18	12 12 52.08
	27	− 21.03	− 7.19	186.72	8.88	16 08.95	12 12 41.65
	28	− 21.30	− 7.21	173.55	8.88	16 08.72	12 12 30.67
Mar.	1	− 21.55	− 7.22	160.37	8.88	16 08.49	12 12 19.15
	2	− 21.80	− 7.23	147.20	8.87	16 08.26	12 12 07.11
	3	− 22.04	− 7.24	134.03	8.87	16 08.02	12 11 54.58
	4	− 22.28	− 7.25	120.85	8.87	16 07.79	12 11 41.56
	5	− 22.51	− 7.25	107.68	8.87	16 07.55	12 11 28.07
	6	− 22.73	− 7.25	94.50	8.86	16 07.31	12 11 14.15
	7	− 22.95	− 7.25	81.33	8.86	16 07.06	12 10 59.80
	8	− 23.16	− 7.25	68.15	8.86	16 06.81	12 10 45.06
	9	− 23.36	− 7.24	54.97	8.86	16 06.56	12 10 29.94
	10	− 23.56	− 7.24	41.80	8.86	16 06.31	12 10 14.48
	11	− 23.75	− 7.23	28.62	8.85	16 06.05	12 09 58.69
	12	− 23.93	− 7.22	15.44	8.85	16 05.79	12 09 42.61
	13	− 24.11	− 7.20	2.26	8.85	16 05.52	12 09 26.25
	14	− 24.28	− 7.19	349.08	8.85	16 05.25	12 09 09.64
	15	− 24.44	− 7.17	335.90	8.84	16 04.98	12 08 52.79
	16	− 24.60	− 7.15	322.72	8.84	16 04.71	12 08 35.74
	17	− 24.75	− 7.13	309.54	8.84	16 04.44	12 08 18.51
	18	− 24.89	− 7.10	296.36	8.84	16 04.17	12 08 01.10
	19	− 25.03	− 7.07	283.18	8.83	16 03.89	12 07 43.54
	20	− 25.16	− 7.05	269.99	8.83	16 03.62	12 07 25.85
	21	− 25.28	− 7.01	256.81	8.83	16 03.34	12 07 08.05
	22	− 25.40	− 6.98	243.62	8.83	16 03.07	12 06 50.16
	23	− 25.51	− 6.95	230.44	8.82	16 02.79	12 06 32.19
	24	− 25.61	− 6.91	217.25	8.82	16 02.52	12 06 14.16
	25	− 25.70	− 6.87	204.07	8.82	16 02.24	12 05 56.09
	26	− 25.79	− 6.83	190.88	8.82	16 01.97	12 05 38.00
	27	− 25.87	− 6.79	177.69	8.81	16 01.70	12 05 19.90
	28	− 25.95	− 6.74	164.50	8.81	16 01.43	12 05 01.80
	29	− 26.01	− 6.69	151.31	8.81	16 01.16	12 04 43.74
	30	− 26.07	− 6.64	138.12	8.81	16 00.88	12 04 25.71
	31	− 26.13	− 6.59	124.93	8.80	16 00.62	12 04 07.74
Apr.	1	− 26.17	− 6.54	111.74	8.80	16 00.35	12 03 49.85
	2	− 26.21	− 6.48	98.55	8.80	16 00.08	12 03 32.06

Figura I.3.15 – Tabela do Astronomical Almanac contendo os valores da Equação do Tempo.

Equação do Centro

Além do Sol Médio, os astrônomos conceberam um outro sol imaginário, o Sol Fictício. O Sol Fictício percorre a eclíptica, assim como o Sol Verdadeiro. A diferença é o que o primeiro o faz a velocidade angular constante. Se os dois partem juntos do periélio (que atualmente ocorre em torno do dia 04/01), o Sol Verdadeiro inicialmente terá uma dianteira, já que no periélio sua velocidade é máxima. Assim, entre o periélio e o afélio (que ocorre no início de julho), o Sol Verdadeiro percorre a eclíptica à frente do Sol Fictício. Este intervalo de tempo inclui a passagem pelo ponto γ , em março. Os dois sóis chegam juntos ao afélio e, a partir daí e até o próximo periélio, o Sol Fictício caminha na frente, já que no afélio a velocidade do Sol Verdadeiro é mínima.

A situação é representada na figura I.3.16. Nela S_f e S_v representam as posições do Sol Fictício e do Verdadeiro, respectivamente. P' e A' são os pontos da órbita da Terra correspondentes ao periélio e ao afélio. Os pontos marcados por β , representam os solstícios de dezembro e de junho. Define-se como equação do centro (U) a diferença entre as longitudes eclípticas do Sol Verdadeiro e do Sol Fictício:

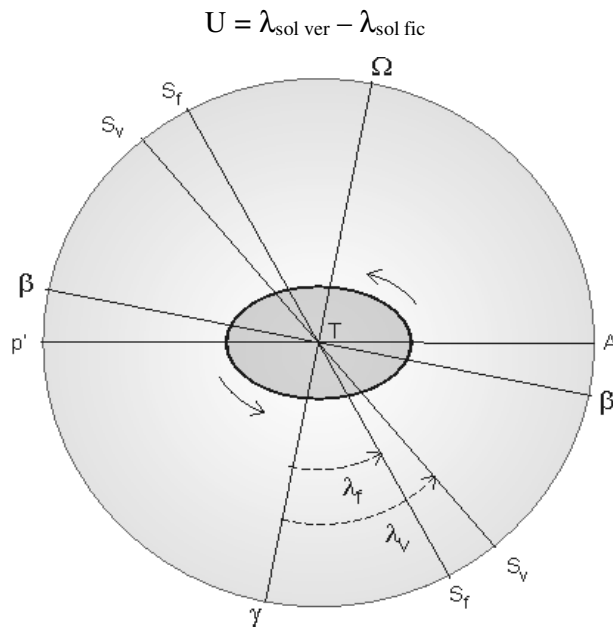


Figura I.3.16 – *Progressão do Sol verdadeiro e do Sol fictício ao longo da eclíptica durante o ano.* Assim, $\lambda_{\text{sol ver}} > \lambda_{\text{sol fic}}$ entre o periélio e o afélio (de janeiro a julho) e $\lambda_{\text{sol ver}} < \lambda_{\text{sol fic}}$ entre afélio e o periélio (de julho a janeiro).

Redução ao Equador

Outra definição importante é a chamada redução ao equador (Q). Esta é definida como a diferença entre a ascensão reta do Sol Verdadeiro e sua longitude eclíptica.

$$Q = \alpha_{\text{sol ver}} - \lambda_{\text{sol ver}}$$

Na figura I.3.17 vemos as três equações, U, Q e E, graficadas em função do dia ao longo do ano. É fácil provar, com as definições destas equações, que:

$$E = U + Q$$

Para isto basta lembrar que o Sol médio (fictício) percorre o equador celeste (a eclíptica) com velocidade angular constante, o que significa que sua ascensão reta $\alpha_{\text{sol med}}$ (longitude eclíptica $\lambda_{\text{sol fic}}$) tem sempre o mesmo valor, $\lambda_{\text{sol fic}} = \alpha_{\text{sol med}}$.

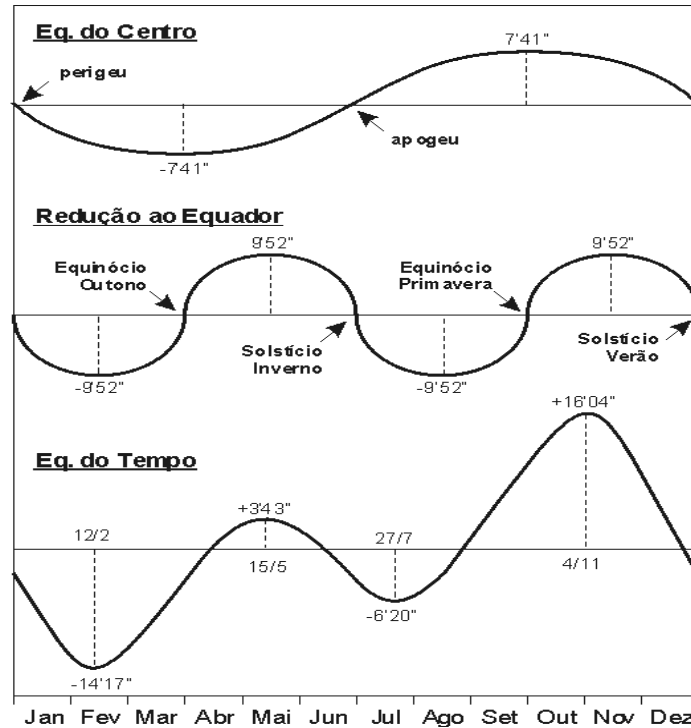


Figura I.3.17 – Equação do centro (painel superior), redução ao equador (painel do meio) e equação do tempo (painel inferior) em função da época do ano.

CAPÍTULO 4

CORREÇÕES ÀS COORDENADAS EQUATORIAS

Variação de Coordenadas Equatoriais

Do ponto de vista da astrometria moderna, a Terra é uma plataforma bastante irregular para a observação do céu. A rotação da Terra não é uniforme, seu eixo de rotação não é fixo no espaço e mesmo a forma do planeta e as posições relativas de pontos sobre sua superfície não são fixas. Como resultado, as coordenadas de um objeto no céu, mesmo as equatoriais, não são rigorosamente constantes. Se muda a direção do eixo de rotação, por exemplo, mudam os valores da ascensão reta α e da declinação δ de todos os objetos na esfera celeste. Dependendo da precisão com que desejamos medir a posição das estrelas, faz-se necessária a correção para estes efeitos.

Na antiguidade, medidas astrométricas, ou seja, medidas da posição dos objetos no céu eram feitas com instrumentos rudimentares, sendo, portanto de precisão baixa. Assim, os efeitos de que trataremos neste capítulo não eram muito importantes para os antigos. Mas se objetivamos apontar um telescópio com uma precisão de 1", ainda assim não precisamos nos preocupar com variações em sua forma e superfície, mas mudanças na orientação do eixo de rotação já se tornam muito importantes. É sobre isso que trataremos nas próximas seções.

De certa forma, as coordenadas equatoriais celestes compatibilizam um sistema móvel, baseado na Terra, com um sistema, que seria ideal, fixo com relação às estrelas distantes. Ascensão reta e declinação são bastante análogas à longitude e latitude, usadas para a superfície da Terra. Estes dois sistemas compartilham o mesmo eixo polar e equador, mas a grade de coordenadas celestes não rotaciona junto com o planeta. Graças a esta característica, as coordenadas equatoriais de uma estrela se mantêm constantes ao longo do seu movimento diurno. Contudo, a ascensão reta e declinação verdadeiras não são fixas com relação às estrelas, pois o sistema equatorial, amarrado ao eixo de rotação e ao equador, desloca-se com estes em função de perturbações gravitacionais sofridas pela Terra. Para poder listar as posições das estrelas em catálogos, utilizamos então as coordenadas baseadas na orientação do pólo e do equador em uma época específica. 1° de Janeiro de 1950 e de 2000 (ou seja, 1950,0 e 2000,0) são as épocas mais comumente usadas.

Como vimos anteriormente, a origem da ascensão reta se dá em um dos dois pontos onde o Sol, em seu caminho anual por entre as estrelas (eclíptica), parece cruzar com o equador celeste. A este ponto chamamos de ponto vernal. Em três dimensões, este ponto é a projeção sobre o céu da reta de intersecção entre o plano do equador da Terra e seu plano orbital. Como o primeiro plano é

sempre perpendicular ao eixo de rotação e este muda sua orientação constantemente, a posição do Ponto vernal no céu também muda com relação às estrelas.

Na prática, as coordenadas celestes estão amarradas a objetos observáveis, pois é muito difícil determinar observacionalmente a posição do ponto vernal e, por conseguinte, a posição de qualquer astro no céu relativamente a este último. Assim sendo, o sistema de coordenadas associadas à época 1950 é definido a partir de posições de estrelas publicadas no quarto Catálogo Fundamental, o FK4, enquanto que o sistema de 2000 é baseado no quinto Catálogo Fundamental, o FK5. Estes catálogos listam estrelas que, em sua maioria, são próximas, de forma que quaisquer sistemas de coordenadas definidas a partir das posições destas estrelas estão sujeito a erros causados pelos movimentos dessas estrelas na esfera celeste (movimentos próprios, ver próximas seções). Atualmente sabemos que o equinócio obtido a partir do FK4 se desloca com relação ao do FK5 por 0,085'' por século.

Atualmente, a definição mais estável de coordenadas para a época 2000 é baseada em 608 rádio-fontes extragalácticas que compõem o *International Celestial Reference Frame* (ICRF). Este sistema de referência é extremamente estável, deslocando-se a menos de 0,020'' por século. O ICRF se tornou o sistema de referência fundamental adotado pela União Astronômica Internacional (IAU) em 01/1998.

Por motivos que são em parte históricos e em parte práticos, a variabilidade temporal da direção do eixo de rotação da Terra e da posição de um observador na superfície da Terra com relação a ele é dividido em 4 fatores: precessão, nutação, deslocamento do pólo celeste e deslocamento do pólo. Por definição, precessão e nutação são expressas matematicamente, usando-se equações matemáticas apropriadas. Os outros dois fatores de variabilidade são desvios observados (ou seja, medidos) com relação ao esperado pelas fórmulas matemáticas que descrevem os dois primeiros. Assim sendo, a amplitude destes dois últimos não é previsível para períodos muito longos. Todos os 4 componentes de variabilidade são discutidos com mais detalhe abaixo.

Precessão

Nem o plano orbital da Terra, cuja intersecção com o céu define a eclíptica, nem o plano do equador terrestre são fixos com relação a objetos muito distantes, como as fontes extragalácticas do ICRF. O principal movimento é a precessão do eixo de rotação em torno da normal ao plano da órbita (pólo eclíptico). Este movimento de precessão é causado por torques gravitacionais devidos à Lua e ao Sol e é chamado de precessão luni-solar. O eixo de rotação da Terra varre um cone no espaço de ângulo de vértice igual a $23,5^\circ$ uma vez a cada 26.000 anos.

Há ainda a precessão planetária, causada pelas perturbações gravitacionais combinadas dos outros planetas do Sistema Solar. Esta causa uma mudança no plano da órbita da Terra. O pólo

eclíptico, contudo, se move bem mais lentamente. Se imaginarmos seu movimento com relação às fontes extragalácticas, o eixo de rotação muda de posição a uma taxa de 20'' por ano, enquanto que a normal ao plano da órbita varre apenas 0,5'' no céu. Ambos os movimentos combinados formam o que chamamos de precessão geral. Há desvios com relação à precessão geral, de curto período, que também são previsíveis e expressos por fórmulas matemáticas, aos quais chamamos de nutação, que será discutida na próxima seção.

Equações para o efeito da precessão, de precisão da ordem de 1'', sobre as coordenadas equatoriais são dadas abaixo. Elas se aplicam para qualquer data dentro de um intervalo de uns 20 anos, centrado no ano 2000.

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = n \cos(\alpha)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = m + n \cdot \sin(\alpha) \tan(\delta)$$

onde $m = 3,07419$ s/ano e $n = 20,0383''$ /ano ou $1,33589$ s/ano. Estes valores, como já mencionado, são válidos por uns 20 anos, centrados no ano 2000. A variação das coordenadas ascensão reta (α) e declinação (δ) são expressas em segundos de tempo e segundos de arco, respectivamente.

As fórmulas, como as acima, para calcular as correções sobre as coordenadas equatoriais de um astro em diferentes épocas e para intervalos de tempo, são dadas pelo *Astronomical Almanac*. Essas fórmulas são muito úteis, pois os catálogos astronômicos geralmente listam as coordenadas das estrelas para uma época arredondada, como 1950,0 ou 2000,0. Se quisermos localizar com precisão um objeto no céu em uma época arbitrária, teremos necessariamente que corrigir as coordenadas catalogadas para a precessão.

Vemos pelas fórmulas acima que a precessão do eixo é muito lenta. De maneira aproximada, a variação de α é da ordem de 3s por ano e a de δ de uns 20'' por ano. A figura I.4.1 mostra a variação da posição dos pólos celestes devida à precessão. O painel da esquerda mostra a situação no presente, em que o pólo norte celeste coincide aproximadamente com a estrela *Polaris*. Daqui a milhares de anos, o pólo celeste coincidirá aproximadamente com a estrela *Vega* (painel da direita).

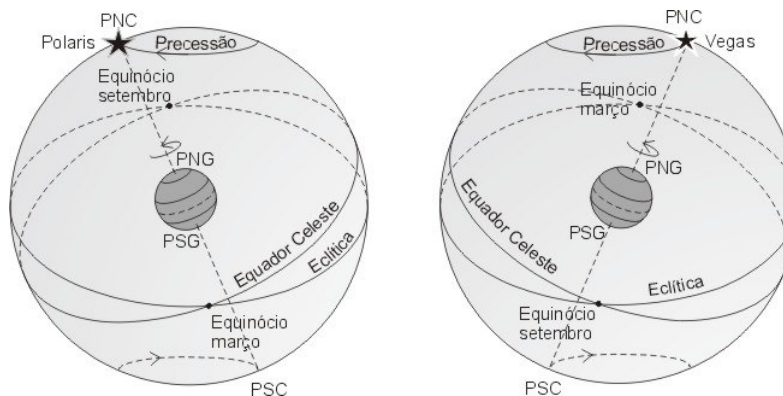


Figura I.4.1 – *Precessão do eixo de rotação terrestre em torno da normal à eclíptica.*

Segue um exemplo de como calcular as correções para o efeito da precessão usando a fórmula dada acima e que repetimos abaixo:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = n \cos(\alpha)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = m + n \cdot \sin(\alpha) \tan(\delta)$$

Computemos a precessão do núcleo da Galáxia de Andrômeda durante 10 anos, conhecidas suas coordenadas equatoriais no ano 2000.

$$\alpha(2000) = 0^h 42^m 44,32^s;$$

$$\delta(2000) = +41^\circ 16' 08,5''$$

O primeiro passo é converter ambas para graus decimais:

$$\alpha = 0 + \frac{42}{60} + \frac{44,32}{3600}$$

$$\alpha = 15(0,71231) = 10,68467^\circ$$

$$\delta = 41 + \frac{16}{60} + \frac{8,5}{3600} = 41,269028$$

Cálculo da precessão:

$$\partial \delta = 20,0383''/ano \cdot \cos(10,68467) \cdot 10_{anos} = 196,9088'' = 3'16,91''$$

$$\partial \alpha = 10_{anos} [3,07419_{s/ano} + 1,33589_{s/ano} \sin(10,68476) \tan(41,269028)] = 32,915s$$

Para computar as coordenadas para o ano 2010, essas correções devem ser adicionadas às coordenadas do ano 2000.

Nutação

Movimentos previsíveis do eixo de rotação terrestre em escalas de tempo (períodos) de 300 anos ou menos são combinados para formar o que chamamos de nutação. Esta pode ser tomada como uma correção de primeira ordem à precessão. De acordo com o modelo de nutação mais atual, este efeito é composto de 106 termos harmônicos envolvendo senos e co-senos com diferentes frequências, em sua maioria efeitos secundários de torque gravitacional do Sol e da Lua, mais 85 correções devidas a efeitos planetários. Os principais termos de nutação são: um termo de período igual a 18,6 anos (período de precessão da órbita da Lua), um termo de 182,6 dias (meio ano), um outro de 13,7 dias (meio mês) e um de 9,3 anos (período de rotação do perigeu lunar).

As correções para nutação dadas abaixo têm uma precisão da ordem de 1'':

$$\Delta \alpha = [\cos(\epsilon) + \sin(\epsilon) \sin(\alpha) \tan(\delta)] d\lambda - \cos(\alpha) \tan(\delta) d\epsilon$$

$$\Delta \delta = \sin(\epsilon) \cos(\alpha) d\lambda + \sin(\alpha) d\epsilon$$

Onde $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ são adicionadas às coordenadas médias (corrigidas para precessão), resultando nas chamadas coordenadas aparentes (ou verdadeiras). Na expressão acima, ϵ é a obliquidade da eclíptica, cujo valor pode ser obtido, dia a dia, no *Astronomical Almanac*. Os termos de nutação em longitude eclíptica ($d\lambda$) e obliquidade eclíptica ($d\epsilon$), respectivamente, são também encontrados em anuários como o *Astronomical Almanac*, ou calculados a partir da teoria de nutação, levando-se em conta os dois termos dominantes:

$$d\lambda = -17,3 \sin(105,7 - 0,05295d) - 1,4 \sin(199,5 + 1,97129d)$$

$$d\epsilon = 9,4 \cos(105,7 - 0,05295d) + 0,7 \cos(199,5 + 1,97129d)$$

onde $d = \text{Data Juliana} - 2451909,5$, os argumentos do seno e do co-seno sendo expressos em graus, e $d\lambda$ e $d\epsilon$ em segundos de arco.

Tabela do Anuário Astronômico do Observatório Nacional

Na Figura I.4.2, a primeira coluna da esquerda lista o mês e o dia do ano. A coluna seguinte lista o valor da hora sideral para $\lambda = 0^\circ$ (Greenwich) à $TU = 0h$, a que chamamos de S_0 . São mostradas tanto a hora sideral aparente quanto a média. A diferença entre as duas, chamada de equação dos equinócios é dada a seguir. Seguem-se então o valor da obliquidade da eclíptica e os termos de nutação de longo e curto período, tanto perpendicular quanto ao longo da eclíptica.

4 F TEMPO SIDERAL, OBLIQUIDADE DAECILÍPTICA E NUTAÇÃO, 2001
O HORA TEMPO UNIVERSAL

DATA H O TU	TEMPO SIDERAL		EQ. EQUIN. PERÍODO		OBLIQ. ECLIP. G ' 23 26	NUT. OBLIQ. PERÍODO	NUT. LONG. PERÍODO
	APARENTE		LONGO	CURTO		LONGO	CURTO
	H M S	S	S	S	" "	" "	" "
FEV. 10	9 20 32.734	33.672	-0.949	-0.011	19.010	-1.953 +0.073	-15.520 -0.197
11	9 24 29.263	30.227	-0.950 +0.006		19.059	-1.926 -0.095	-15.533 -0.104
12	9 28 25.832	26.792	-0.951 +0.001		19.084	-1.898 -0.094	-15.547 -0.012
13	9 32 22.382	23.338	-0.952 -0.004		19.089	-1.871 +0.073	-15.563 -0.055
14	9 36 18.933	19.893	-0.953 -0.007		19.080	-1.844 +0.039	-15.580 -0.110
15	9 40 15.487	16.448	-0.954 -0.007		19.067	-1.817 +0.000	-15.599 -0.118
16	9 44 12.043	13.004	-0.955 -0.006		19.057	-1.791 -0.035	-15.620 -0.092
17	9 48 8.600	9.559	-0.957 -0.002		19.056	-1.765 -0.061	-15.642 -0.041
18	9 52 5.158	6.115	-0.958 +0.002		19.066	-1.739 -0.075	-15.665 -0.025
19	9 56 1.716	2.670	-0.960 -0.006		19.091	-1.714 -0.075	-15.689 +0.051
20	9 59 58.273	59.225	-0.961 +0.009		19.128	-1.689 -0.061	-15.715 +0.146
21	10 3 54.829	55.781	-0.963 +0.011		19.175	-1.664 -0.037	-15.743 +0.180
22	10 7 51.383	52.336	-0.965 +0.011		19.229	-1.640 -0.006	-15.771 +0.185
23	10 11 47.935	48.891	-0.966 +0.010		19.284	-1.616 +0.026	-15.801 +0.159
24	10 15 44.485	45.447	-0.968 -0.006		19.334	-1.593 +0.054	-15.832 +0.101
25	10 19 41.033	42.002	-0.970 +0.001		19.374	-1.570 -0.072	-15.865 +0.021
26	10 23 37.581	38.558	-0.972 -0.004		19.400	-1.548 +0.078	-15.898 -0.070
27	10 27 34.129	35.113	-0.975 -0.010		19.411	-1.526 +0.068	-15.933 -0.159
28	10 31 30.677	31.669	-0.977 -0.014		19.407	-1.504 +0.044	-15.968 -0.230
MAR. 1	10 35 27.228	28.224	-0.979 -0.016		19.392	-1.484 +0.009	-16.005 -0.269
2	10 39 23.781	24.779	-0.981 -0.016		19.371	-1.463 -0.030	-16.043 -0.266
3	10 43 20.337	21.334	-0.984 -0.013		19.354	-1.444 -0.067	-16.081 -0.216
4	10 47 16.896	17.890	-0.986 -0.008		19.347	-1.425 -0.091	-16.121 -0.127
5	10 51 13.456	14.445	-0.988 -0.001		19.360	-1.406 -0.096	-16.161 -0.013
6	10 55 10.016	11.000	-0.991 -0.006		19.395	-1.388 -0.077	-16.202 +0.100
7	10 59 6.573	7.556	-0.994 +0.011		19.449	-1.371 -0.039	-16.244 +0.184
8	11 3 3.128	4.111	-0.996 +0.013		19.513	-1.354 +0.009	-16.286 -0.217
9	11 6 59.680	60.667	-0.999 +0.012		19.574	-1.338 +0.056	-16.329 +0.194
10	11 10 56.228	57.222	-1.001 -0.008		19.620	-1.322 +0.088	-16.373 +0.124
11	11 14 52.775	53.777	-1.004 -0.002		19.643	-1.307 +0.097	-16.417 +0.032
12	11 18 49.322	50.333	-1.007 -0.003		19.642	-1.293 +0.083	-16.462 -0.054
13	11 22 45.871	46.888	-1.010 -0.007		19.624	-1.280 -0.053	-16.507 -0.112
14	11 26 42.423	43.443	-1.012 -0.008		19.596	-1.267 +0.014	-16.553 -0.131
15	11 30 38.977	39.998	-1.015 -0.007		19.569	-1.255 -0.025	-16.599 -0.111
16	11 34 35.532	36.554	-1.018 -0.004		19.549	-1.243 -0.055	-16.645 -0.062
17	11 38 32.089	33.109	-1.021 -0.000		19.540	-1.232 -0.073	-16.691 +0.006
18	11 42 28.646	29.665	-1.024 +0.005		19.546	-1.222 -0.077	-16.738 +0.077
19	11 46 25.202	26.220	-1.027 +0.009		19.564	-1.212 -0.067	-16.784 +0.140
20	11 50 21.757	22.776	-1.029 +0.011		19.594	-1.204 -0.044	-16.831 +0.182
21	11 54 18.311	19.331	-1.032 +0.012		19.631	-1.195 -0.014	-16.878 +0.195
22	11 58 14.862	15.886	-1.035 -0.011		19.670	-1.188 +0.018	-16.924 +0.177
23	12 2 11.411	12.442	-1.038 +0.008		19.706	-1.181 +0.049	-16.971 +0.128

Figura I.4.2 – Tabela do Anuário Astronômico do Observatório Nacional.

Os coeficientes que multiplicam $d\lambda$ e $d\delta$, e que dependem somente das coordenadas equatoriais da estrela, podem ser encontrados no *Apparent Places of Stars*:

Tabela do Apparent Places of Stars

Na Figura I.4.3, a Tabela mostra as posições (α e δ) de diferentes estrelas de 10 em 10 dias ao longo do ano. No alto da coluna é dada a designação da estrela, seu nome quando conhecido, magnitude aparente e tipo espectral. Os graus e minutos (ou horas e minutos, no caso da ascensão reta) das coordenadas equatoriais são mostrados logo abaixo. Seguem-se os segundos para os diferentes meses e dias, dados no extremo à esquerda da página. Essas coordenadas são corrigidas para aberração, precessão, paralaxe, movimento próprio e nutação de longo período. Na parte de baixo de cada coluna são mostrados a posição média da estrela no ano e os coeficientes que acompanham a correção para nutação de curto período (não incorporada nas posições listadas).

Name	π Hydræ		B.D. +39° 2720* (Canum Venaticorum)		γ Centauri		γ H. Bootis	
Mag. Spect.	3.27	K0	7.97	K0	2.06	K0	5.27	M3
U.T.	R.A.	Dec.	R.A.	Dec.	R.A.	Dec.	R.A.	Dec.
	^h ^m 14 06	[°] ['] -26 40	^h ^m 14 06	[°] ['] +38 24	^h ^m 14 06	[°] ['] -36 21	^h ^m 14 07	[°] ['] +43 51
1 0.3	17.827 +339	24.36 -126	22.802 -346	74.86 -269	36.367 +366	36.62 -92	51.690 +362	26.53 -271
1 10.3	18.177 +350	25.85 -149	23.166 -364	72.54 -232	36.746 +379	37.87 -125	52.075 +385	24.22 -231
1 20.3	18.531 +354	27.54 -166	23.542 -376	70.67 -187	37.129 -383	39.41 -154	52.475 +400	22.41 -181
1 30.2	18.875 +344	29.37 -183	23.915 -373	69.35 -132	37.501 -372	41.20 -179	52.871 +396	21.17 -124
2 9.2	19.202 +327	31.27 -190	24.273 +358	68.57 -78	37.855 -354	43.15 -195	53.254 +383	20.50 -67
2 19.2	19.507 -305	33.20 -193	24.609 +336	68.36 -21	38.185 +330	45.23 -208	53.614 +369	20.45 -5
3 1.1	19.780 -273	35.09 -189	24.911 +302	68.74 +38	38.481 +296	47.38 -215	53.937 +323	21.00 -56
3 11.1	20.022 +242	36.91 -182	25.176 +285	69.62 +68	38.743 +262	49.53 -215	54.221 +284	22.07 -107
3 21.1	20.231 +209	38.63 -172	25.399 -223	70.99 +137	38.969 +226	51.67 -214	54.460 -239	23.65 +156
3 31.1	20.404 +173	40.22 -156	25.575 -176	72.76 +177	39.156 +187	53.72 -205	54.648 +188	25.63 +198
4 10.0	20.544 +140	41.66 -144	25.709 +134	74.82 +208	39.307 -151	55.68 -196	54.788 +140	27.90 +227
4 20.0	20.651 +107	42.96 -130	25.798 +89	77.12 +230	39.422 -115	57.53 -185	54.880 +92	30.41 +251
4 30.0	20.725 +74	44.08 -112	25.843 +45	79.53 +241	39.500 -78	59.22 -169	54.923 +43	33.01 +260
5 10.0	20.771 -46	45.04 -96	25.851 +8	81.95 +242	39.545 -45	60.75 -153	54.924 +1	35.61 +260
5 19.9	20.786 -15	45.84 -80	25.821 -30	84.33 +238	39.556 +11	62.10 -135	54.882 -42	38.15 +254
5 29.9	20.772 -14	46.46 -62	25.757 -54	86.54 +221	39.534 -22	63.23 -113	54.803 -79	40.49 +234
6 8.9	20.732 -40	46.92 -46	25.664 -93	88.54 +209	39.483 -51	64.16 -93	54.693 -110	42.59 +210
6 18.8	20.664 -68	47.19 -27	25.543 -121	90.28 +174	39.399 -84	64.85 -69	54.550 -143	44.40 +181
6 28.8	20.573 -91	47.27 -8	25.399 -144	91.68 +140	39.289 -110	65.28 -43	54.384 -166	45.83 +143
7 8.8	20.461 -112	47.19 -8	25.237 -162	92.73 +105	39.155 -134	65.47 -19	54.198 -186	46.89 +106
7 18.8	20.328 -133	46.90 -28	25.057 -180	93.41 +68	38.998 -157	65.38 +9	53.993 -205	47.53 +64
7 28.7	20.183 -145	46.45 +45	24.869 -189	93.66 -25	38.827 -171	65.03 +35	53.780 -213	47.72 +19
8 7.7	20.027 -159	45.83 +62	24.675 -194	93.53 -13	38.645 -182	64.43 +60	53.561 -219	47.49 -23
8 17.7	19.868 -152	45.05 +78	24.480 -195	92.98 -55	38.460 -165	63.57 -98	53.343 -218	46.81 -68
8 27.7	19.716 -152	44.16 +89	24.295 -185	92.01 -97	38.283 -177	62.51 -106	53.135 -208	45.69 -112
9 6.6	19.575 -141	43.18 +96	24.124 -171	90.67 -134	38.119 -164	61.28 -123	52.942 -159	44.17 -152
9 16.6	19.456 -119	42.15 +102	23.975 -149	88.93 -174	37.980 -139	59.91 +137	52.774 -168	42.24 -193
9 26.6	19.368 -96	41.13 +102	23.857 -118	86.84 -209	37.878 -102	58.49 +142	52.640 -154	39.94 -230
10 6.5	19.317 -51	40.17 -96	23.776 -81	84.42 -242	37.816 -82	57.07 +142	52.544 -96	37.32 -262
10 16.5	19.313 -4	39.33 -64	23.741 -35	81.70 -272	37.806 -10	55.71 +136	52.498 -45	34.38 -384
10 26.5	19.359 -46	38.68 +65	23.758 +17	78.74 -296	37.853 +47	54.51 +120	52.508 -10	31.22 -316
11 5.5	19.457 -98	38.23 +45	23.629 +71	75.59 -315	37.958 +106	53.50 +101	52.574 -86	27.88 -334
11 15.4	19.613 -158	38.05 +18	23.958 +129	72.31 -328	38.125 +167	52.77 -73	52.703 +129	24.42 -346
11 25.4	19.821 +208	38.19 -187	24.145 -187	69.00 -301	38.349 +254	52.37 -40	52.894 +191	20.96 -346
12 5.4	20.077 +256	38.65 -239	24.384 -239	65.71 -329	38.625 +278	52.32 +5	53.140 +248	17.55 -341
12 15.4	20.374 +237	39.45 -90	24.673 -266	62.56 -315	38.946 -321	52.66 -34	53.441 +301	14.31 -324
12 25.3	20.700 +306	40.55 -110	25.000 +327	59.65 -281	39.298 -352	53.38 -72	53.784 +343	11.36 -295
12 35.3	21.046 +346	41.92 -137	25.356 +356	57.05 -374	39.672 -374	54.45 -107	54.158 +374	08.75 -261
Mean Place	20.585	47.91	25.609	71.72	39.177	63.24	54.555	24.63
sec δ , tan δ	+1.119	-0.503	+1.276	+0.793	+1.242	-0.736	+1.387	-0.961
dist δ , d δ /h	+0.068	-0.34	+0.050	-0.34	+0.071	-0.34	+0.048	-0.34
dist δ , d δ /d	-0.029	-0.52	+0.045	-0.52	-0.042	-0.52	+0.054	-0.53
Obse Trans.	April 24		April 24		April 24		April 24	

Figura I.4.3 – *Tabela do Apparent Places of Stars.*

Para ajudar a visualizar em separado os efeitos da precessão e da nutação podemos fazer uso da figura I.4.4. Nela, vemos a posição da Terra (T), a direção do pólo da eclíptica (PE), e a direção do pólo celeste (PC), ou seja, do eixo de rotação em duas épocas diferentes. A variação no espaço da direção do eixo de rotação da Terra sem alterar-se a obliquidade da eclíptica é a precessão luni-solar, representada pelo cone maior da figura. Superposto a este há um cone menor, que representa a variação ondular do eixo causada pela nutação.

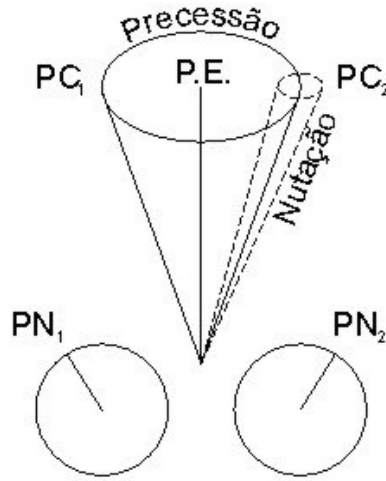


Figura I.4.4 – Cones descritos pelo eixo de rotação da Terra devido à precessão e à nutação.

Deslocamento do Pólo Celeste

Este efeito é a parte imprevisível da nutação. Os valores desse efeito são publicados pelo *IERS Bulletin A* com componentes em separado em longitude ($d\lambda$) e obliquidade ($d\epsilon$).

Movimento do Pólo

Devido a movimentos internos e deformações na forma da Terra, uma linha que interliga as posições de diferentes observadores na sua superfície não é fixa com relação ao eixo de rotação. A variação na posição relativa de um observador com relação a este eixo é o que chamamos de movimento do pólo. Para um observador qualquer, este movimento tem o efeito de mudar sua latitude e sua longitude, que por seu turno é necessária nas transformações de coordenadas terrestres para celestes. O *International Earth Rotation Service* (IERS) define um sistema de referência terrestre baseado em um eixo de referência, chamado de *IERS Reference Pole* (IRP). As fórmulas abaixo nos dão a variação de latitude, longitude e do azimute de uma mira em função dos valores médios das próprias coordenadas (ϕ_{med} , λ_{med}) e das coordenadas desse pólo médio expressas em um sistema cartesiano, (x,y).

$$\Delta\phi = \phi_{\text{med}} - \phi_{\text{obs}} = x\cos(\lambda) + y\sin(\lambda)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{med}} - \lambda_{\text{obs}} = -[x\sin(\lambda) + y\cos(\lambda)] \tan(\phi)$$

$$\Delta A = A_{\text{med}} - A_{\text{obs}} = -[x\sin(\lambda) + y\cos(\lambda)] \sec(\phi)$$

O componente dominante do movimento do pólo, chamado de oscilação de Chandler, é um movimento aproximadamente circular do pólo de referência em torno do pólo celeste, de amplitude de cerca de 0,7'' e um período de uns 14 meses aproximadamente. Irregularidades em escalas de tempo mais curtas e também mais longas, devidas a movimentos no interior do planeta, são imprevisíveis e tem que ser monitoradas por observações. A soma do componente de Chandler com

os componentes irregulares são publicados semanalmente no *IERS Bulletin A*, juntamente com previsões para vários meses de antecipação.

Astrometria

Nas seções anteriores, tratamos de algumas perturbações na posição de um astro, tais como as devidas à precessão, à nutação e ao movimento do pólo. Estas perturbações se devem a variações na orientação do sistema de coordenadas equatoriais como um todo. Vimos que a maior parte destes efeitos pode ser explicada por modelos de perturbação gravitacional exercida sobre a Terra pelo Sol, pela Lua e pelos planetas do Sistema Solar. Em outras palavras, podemos descrever de forma matemática a mudança sistemática das coordenadas equatoriais de uma estrela qualquer devido à precessão, à nutação, etc.

Nestas próximas seções veremos alguns outros efeitos que afetam a posição de um objeto no céu. São eles: aberração, paralaxe, refração e movimento próprio. Todos são conceitualmente simples e também podem ser quantificados por expressões matemáticas. Uma diferença importante com relação aos efeitos já discutidos é que as variações causadas na posição de um astro agora não resultam da mudança na orientação do sistema equatorial de coordenadas como um todo no espaço, mas sim de efeitos físicos associados aos próprios objetos ou à luz que eles emitem.

Estes efeitos são também, em geral, de menor amplitude do que os anteriores, em especial se comparados à precessão, tendo sido medidos e adequadamente descritos somente a partir do século XIX. Isso porque, como já dissemos, medidas astrométricas evoluíram muito nos últimos tempos, sendo este um assunto da Astrometria.

- Há um século atrás, praticava-se a Astronomia de Posição com um instrumento que só se movia ao longo do meridiano astronômico do local, o círculo meridiano.
- Satélites no espaço estão começando a fazer medidas com muito mais precisão do que as feitas em solo, sob a turbulenta atmosfera da Terra.

A figura I.4.5 mostra a evolução da precisão das medidas astrométricas ao longo da História. A linha do tempo flui da esquerda para a direita, desde a época do astrônomo grego Hiparco (século II AC) até a época do Satélite Astrométrico Hipparcos (época atual). Na parte inferior da figura, vemos o menor ângulo que o homem era capaz de medir em cada época. Este ângulo, além de indicado explicitamente, é também representado pela máxima distância a que uma pessoa de estatura mediana (em torno de 1,7m) poderia estar de forma que tamanho angular pudesse ser medido com os instrumentos da época. Assim, na Grécia antiga medidas angulares se limitavam a 1° de precisão, o que corresponde à abertura angular subentendida por uma pessoa a 100m de distância do observador.

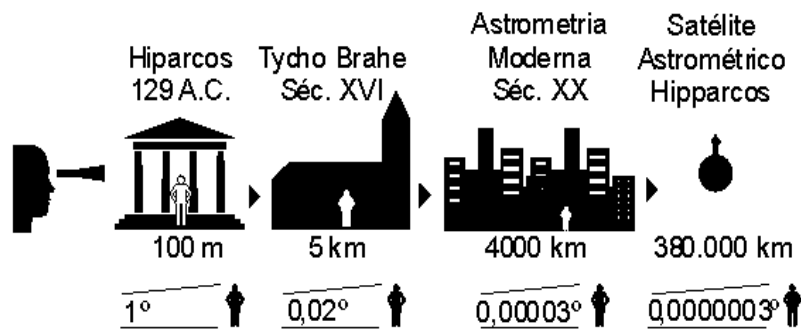


Figura I.4.5 – *Evolução da precisão astrométrica ao longo da História. Para cada época é mostrado o menor ângulo mensurável e a distância de uma pessoa para que ela cubra este ângulo.*

Em tempos mais recentes, já no século XX, tornou-se possível medir ângulos da ordem de $0,00003^\circ = 0,1''$. Isso corresponde ao ângulo compreendido entre os pés e a cabeça de uma pessoa a 4000 km de distância. Não é de se estranhar que, com este brutal aumento na capacidade de se medir aberturas angulares no céu, determinados efeitos, antes no máximo previstos, mas nunca medidos, pudessem finalmente ser quantificados.

Aberração

A posição aparente de um objeto sofre um desvio cuja amplitude depende da amplitude de seu movimento com relação ao observador (ou seja, sua velocidade relativa ao mesmo). Este efeito está ligado ao fato de ser finita a velocidade de propagação da luz. A figura I.4.6 ilustra o efeito da aberração: um projétil incide sobre um alvo em movimento, atingindo seu lado mais próximo em C. Se o alvo estivesse em repouso, o projétil atingiria seu lado mais distante em A. Mas como o alvo está em movimento, o projétil incide sobre o ponto B. Do ponto de vista do alvo, a direção de onde parece vir o projétil será então a direção BC, ao invés da direção AC. O ângulo entre ambas, α , depende da razão entre as velocidades do alvo e do projétil, assim como da direção relativa entre estas duas velocidades, θ .

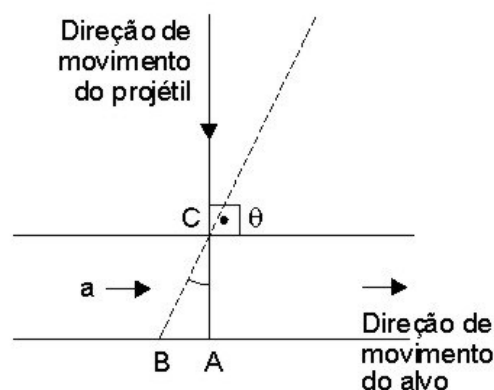


Figura I.4.6 – *Efeito de aberração, exemplificado por um projétil que incide sobre as duas laterais de um alvo em movimento.*

Na figura acima fizemos $\theta = 90^\circ$ para simplificar a visualização do efeito. No caso geral, o desvio aparente α na direção do projétil visto do alvo será dado por:

$$\alpha = \frac{v}{c} \sin(\theta)$$

onde θ é o ângulo entre a direção do movimento do projétil e a direção do movimento do observador, c é a velocidade do projétil e v a velocidade do alvo.

Há dois tipos de aberração mais importantes no caso astronômico: a aberração diurna e a aberração anual. Em ambos os casos, o alvo é o observador e o projétil é a luz proveniente de um astro. Podemos dizer então que em ambos os casos estamos tratando do fenômeno de aberração da luz. No caso da aberração diurna, o efeito é devido ao movimento de rotação da Terra, tal como descrito na figura I.4.7. Nela vemos a Terra a partir da direção do pólo norte. À medida que a Terra rotaciona, um observador qualquer na sua superfície se move no espaço, sua direção de movimento fazendo um ângulo variável com relação à direção de onde vem a luz do objeto. O valor de v neste caso é a velocidade do observador devido à rotação, que é máxima no equador ($v = 0,4651$ km/s), tendendo a $v = 0$ km/s para observadores próximos aos pólos. Já o valor da velocidade da luz é $c = 300.000$ km/s. Pela fórmula acima, o efeito da aberração, ou seja, o ângulo entre a posição observada e a aparente do astro será $\alpha = 0,32''$ para um observador no equador terrestre e zero para um observador nos pólos. Note que este é o valor máximo, obtido assumindo-se que a incidência da luz seja perpendicular à direção do movimento de rotação (caso mostrado na figura).

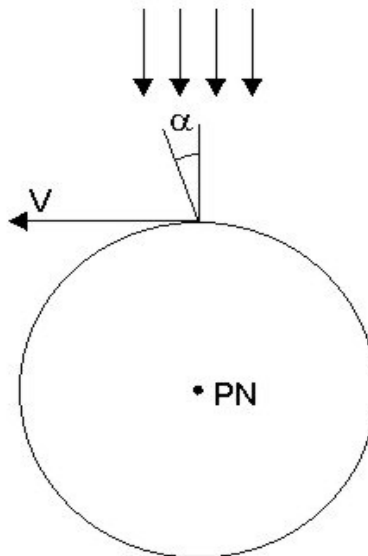


Figura I.4.7 – *Efeito da aberração diurna da luz, resultado da rotação da Terra.*

No caso da aberração anual, o deslocamento aparente na posição de uma estrela é devido ao movimento orbital da Terra em torno do Sol. A fórmula que nos dá o valor do deslocamento aparente é a mesma que antes. O que muda é o valor da velocidade v . A velocidade orbital da Terra varia ao longo do ano, pois a órbita é uma elipse. Um valor médio neste caso seria $v = 30 \text{ km/s}$. Aplicando-se a expressão para o efeito da aberração, tem-se então $\alpha = 20,6''$. Nota-se, portanto, que a aberração anual é maior do que a aberração diurna por quase duas ordens de grandeza. Assim, a aberração anual é mais relevante, sendo imprescindível a correção da posição de uma estrela para este efeito, se estamos interessados em determinações astronômicas de precisão da ordem de $1''$. Note ainda que o efeito da aberração da luz, tanto diurna quanto anual, é periódico, repetindo-se em escalas de tempo de 1 dia e 1 ano, respectivamente.

Refração

A direção de propagação da luz sofre um desvio ao atravessar a atmosfera terrestre. Este efeito é cromático, ou seja, varia com o comprimento de onda da luz; ele é mais pronunciado para luz azul do que para luz vermelha. O efeito sempre faz com que a altura (h) observada de um objeto no céu seja maior do que ela realmente é. Um exemplo de refração ocorre com o Sol todos os dias. Quando o vemos se por no horizonte, ele na verdade já está fisicamente abaixo deste último. Mas sua imagem refratada pela atmosfera se projeta acima do horizonte. Em outras palavras, a refração neste caso é da ordem de $35'$, aproximadamente, o diâmetro angular do Sol no céu, visto da Terra. A figura I.4.8 mostra o efeito da refração sofrida pela luz de um objeto ao incidir na atmosfera da Terra, fazendo com que sua distância zenital observada seja menor do que a verdadeira (ou aparente).

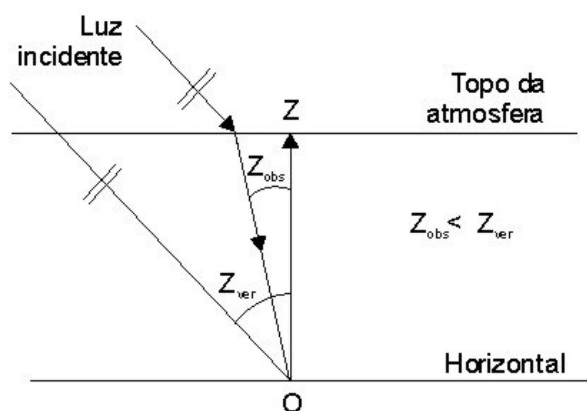


Figura I.4.8 – Efeito da refração da luz pela atmosfera. A luz sofre um desvio em seu caminho ao entrar na atmosfera, fazendo com que a distância zenital medida seja menor do que a verdadeira.

A figura I.4.9 é semelhante à anterior, mas mostra a situação específica do Sol quando visto no horizonte de um observador. O observador se situa no ponto P sobre a superfície da Terra. Ele vê

a imagem refratada do Sol no seu horizonte, na direção PO' . Mas, na verdade, o Sol já está fisicamente abaixo do horizonte de P , na direção dada pelo segmento OP , que faz um ângulo R_m (refração média) com PO' . Devido ao efeito da refração, os raios do Sol que se propagam ao longo da direção OP , ao encontrarem a atmosfera da Terra em P' , desviam-se continuamente até atingir o observador em P .

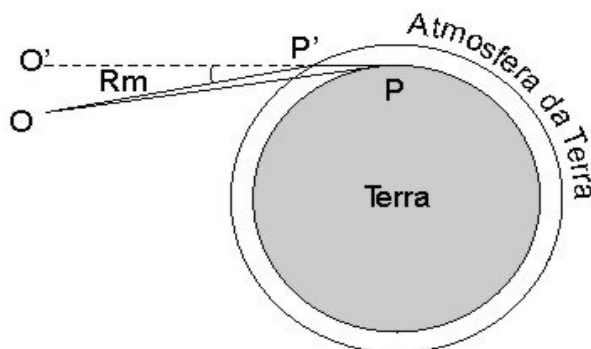


Figura I.4.9 – Refração sofrida pela luz do Sol quando este está nascendo ou se pondo. O Sol é visto por uns 2 minutos, mesmo estando fisicamente abaixo do horizonte.

Como já mencionado, o por do Sol visto por um observador ocorre quando o primeiro se encontra fisicamente $35'$ abaixo do horizonte segundo. O desvio na posição do objeto é, portanto, maior do que $0,5^\circ$. O valor do desvio causado pela refração depende da altura verdadeira do objeto, sendo uma função decrescente da mesma. Isso é mostrado na figura I.4.10, onde vemos o valor do desvio no eixo vertical e o valor da altura verdadeira no eixo horizontal

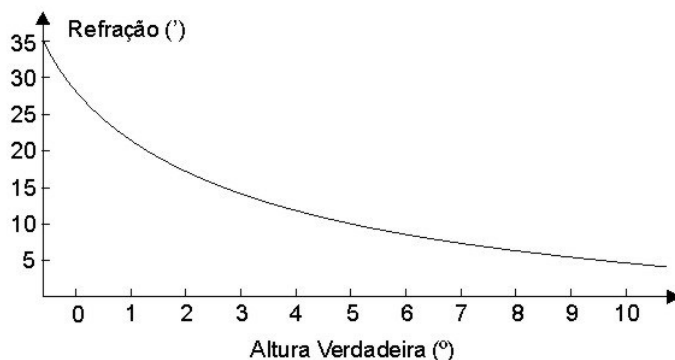


Figura I.4.10 – Variação do efeito médio de refração em função da altura do objeto.

Valores médios de refração também podem ser encontrados nas efemérides.

Tabela do Anuário Astronômico do ON com valores de refração média para diferentes distâncias zenitais

Na Figura I.4.11, a coluna da esquerda são dados valores de distância zenital, na do meio o valor correspondente de R_m e na da direita a diferença em R_m para um intervalo de $10'$ em torno do valor de z dado.

Tábua 1 — Refração média

7 G

α	R^m	Dif. para $10''$	α	R^m	Dif. para $10''$	α	R^m	Dif. para $10''$
50 00	66.4	0.39	56 00	79.5	0.49	60 00	96.3	0.64
10	66.8	0.39	10	80.0	0.49	10	97.0	0.65
20	67.2	0.40	20	80.5	0.50	20	97.6	0.65
30	67.6	0.40	30	81.0	0.50	30	98.3	0.66
40	68.0	0.41	40	81.5	0.51	40	98.9	0.67
50	68.4	0.41	50	82.0	0.51	50	99.6	0.68
51 00	68.8	0.41	56 00	82.5	0.52	61 00	100.3	0.68
10	69.2	0.41	10	83.1	0.52	10	101.0	0.69
20	69.6	0.42	20	83.6	0.53	20	101.7	0.70
30	70.0	0.42	30	84.1	0.53	30	102.4	0.71
40	70.5	0.42	40	84.6	0.53	40	103.1	0.72
50	70.9	0.43	50	85.2	0.54	50	103.8	0.73
52 00	71.3	0.43	57 00	85.7	0.54	62 00	104.5	0.74
10	71.7	0.43	10	86.3	0.55	10	105.2	0.75
20	72.2	0.43	20	86.8	0.56	20	106.0	0.75
30	72.6	0.44	30	87.4	0.56	30	106.7	0.76
40	73.0	0.44	40	87.9	0.56	40	107.5	0.77
50	73.5	0.44	50	88.5	0.57	50	108.3	0.78
53 00	73.9	0.44	58 00	89.1	0.57	63 00	109.0	0.79
10	74.4	0.45	10	89.6	0.58	10	109.8	0.79
20	74.8	0.45	20	90.2	0.58	20	110.6	0.79
30	75.3	0.45	30	90.8	0.59	30	111.4	0.80
40	75.7	0.46	40	91.4	0.59	40	112.2	0.81
50	76.2	0.46	50	92.0	0.60	50	113.0	0.82
54 00	76.6	0.46	59 00	92.6	0.60	64 00	113.9	0.83
10	77.1	0.47	10	93.2	0.61	10	114.7	0.84
20	77.6	0.47	20	93.8	0.61	20	115.6	0.85
30	78.1	0.48	30	94.5	0.62	30	116.4	0.86
40	78.5	0.48	40	95.1	0.63	40	117.3	0.87
50	79.0	0.49	50	95.7	0.64	50	118.2	0.88
55 00	79.5	0.49	60 00	96.3	0.64	65 00	119.0	0.90

Figura I.4.11 – Tabela do Anuário Astronômico do ON com valores de refração média para diferentes distâncias zenitais.

Note que além de variar com a frequência da luz e com a altura, a refração também depende da densidade do ar (variando, portanto com a altitude do observador) e das condições atmosféricas, como a temperatura e a pressão. Em geral, a refração média é aquela esperada em condições padrão, em que estas variáveis termodinâmicas têm valores específicos.

Fatores de correção a serem aplicados à refração R^m também são tabelados no Anuário Astronômico do ON.

Tabela do Anuário Astronômico do ON com os fatores de correção de R^m para T e P

Na Figura I.4.12, a coluna à esquerda temos listados os valores de temperatura (t) e na primeira linha no alto valores da pressão (em mm de Hg). O miolo da tabela contém os valores dos fatores de correção a serem multiplicados por R^m .

Tábua 2 — Correção da refração média para a
temperatura e a pressão

II G

$\frac{H}{t}$	630	640	650	660	670	680	690	700	P. P.
+ 15	0.844	0.858	0.871	0.884	0.898	0.911	0.925	0.938	
15.5	0.843	0.856	0.869	0.883	0.896	0.909	0.923	0.936	
16	0.841	0.854	0.868	0.881	0.895	0.908	0.921	0.935	
16.5	0.839	0.853	0.866	0.880	0.893	0.906	0.920	0.933	
17	0.838	0.851	0.865	0.878	0.891	0.905	0.918	0.931	
17.5	0.836	0.850	0.863	0.876	0.890	0.903	0.916	0.929	
18	0.835	0.848	0.862	0.875	0.888	0.901	0.915	0.928	
18.5	0.833	0.847	0.860	0.873	0.886	0.900	0.913	0.926	
19	0.832	0.845	0.858	0.872	0.885	0.898	0.911	0.924	
19.5	0.830	0.844	0.857	0.870	0.883	0.896	0.910	0.923	
20	0.829	0.842	0.855	0.868	0.882	0.895	0.908	0.921	
20.5	0.827	0.841	0.854	0.867	0.880	0.893	0.906	0.919	
21	0.826	0.839	0.852	0.865	0.878	0.892	0.905	0.918	
21.5	0.824	0.837	0.851	0.864	0.877	0.890	0.903	0.916	
22	0.823	0.836	0.849	0.862	0.875	0.888	0.902	0.915	
22.5	0.822	0.835	0.848	0.861	0.874	0.887	0.900	0.913	0.001
23	0.820	0.833	0.846	0.859	0.872	0.885	0.898	0.911	2 3
23.5	0.819	0.832	0.845	0.858	0.871	0.884	0.897	0.910	3 4
24	0.817	0.830	0.843	0.856	0.869	0.882	0.895	0.908	4 5
24.5	0.816	0.829	0.842	0.855	0.868	0.880	0.893	0.906	5 6
25	0.814	0.827	0.840	0.853	0.866	0.879	0.892	0.905	6 8
25.5	0.813	0.826	0.839	0.852	0.864	0.878	0.890	0.903	7 9
26	0.811	0.824	0.837	0.850	0.863	0.876	0.889	0.902	8 10
26.5	0.810	0.823	0.836	0.849	0.861	0.874	0.887	0.900	9 12
27	0.809	0.821	0.834	0.847	0.860	0.873	0.886	0.898	
27.5	0.807	0.820	0.833	0.846	0.858	0.871	0.884	0.897	
28	0.806	0.819	0.831	0.844	0.857	0.870	0.883	0.895	
28.5	0.804	0.817	0.830	0.843	0.855	0.868	0.881	0.894	
29	0.803	0.816	0.828	0.841	0.854	0.867	0.879	0.892	
29.5	0.802	0.814	0.827	0.840	0.852	0.865	0.878	0.891	
30	0.800	0.813	0.826	0.838	0.851	0.864	0.876	0.889	
30.5	0.799	0.811	0.824	0.837	0.849	0.862	0.875	0.888	
31	0.797	0.810	0.823	0.835	0.848	0.861	0.873	0.886	
31.5	0.796	0.809	0.821	0.834	0.847	0.859	0.872	0.884	
32	0.795	0.807	0.820	0.832	0.845	0.858	0.870	0.883	
32.5	0.793	0.806	0.818	0.831	0.844	0.856	0.869	0.881	
33	0.792	0.804	0.817	0.830	0.842	0.855	0.867	0.880	
33.5	0.790	0.803	0.816	0.828	0.841	0.853	0.866	0.878	
34	0.789	0.802	0.814	0.827	0.839	0.852	0.864	0.877	
34.5	0.788	0.800	0.813	0.825	0.838	0.850	0.863	0.875	
+ 35	0.786	0.799	0.811	0.824	0.836	0.849	0.861	0.874	

Figura I.4.12 – Tabela do Anuário Astronômico do ON com os fatores de correção de Rm para T e P.

Paralaxe e unidades de distância em Astronomia

Dentro do Sistema Solar, podemos usar o raio (ou o diâmetro) da Terra para medir paralaxes horizontais, tal como descrito pela figura I.4.13: a distância a um planeta, por exemplo, pode ser medida observando-o de pontos diametralmente opostos da superfície da Terra e medindo-se o deslocamento angular do planeta com relação às estrelas ao fundo. À metade deste deslocamento angular, conforme indicado na figura, chamamos de paralaxe. O paralaxe é comumente representado pela letra grega π . Quanto maior o valor de π , menor é a distância ao planeta.

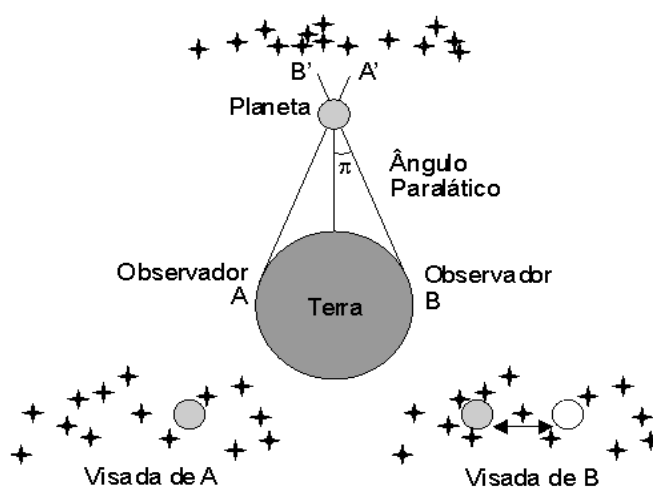


Figura I.4.13 – *Efeito de paralaxe geocêntrica ou horizontal: um planeta parece se deslocar com relação ao fundo de estrelas quando visado de pontos diametralmente opostos na superfície da Terra.*

Na verdade, há outros tipos de paralaxe, além do paralaxe geocêntrico ou horizontal definido acima. Podemos definir, por exemplo, o paralaxe heliocêntrico, que faz uso da visada de dois pontos opostos ao longo da órbita da Terra em torno do Sol. A figura I.4.14 mostra a situação, que é geometricamente muito semelhante à da figura anterior; o que muda é a linha de base usada para medir o ângulo paralático.

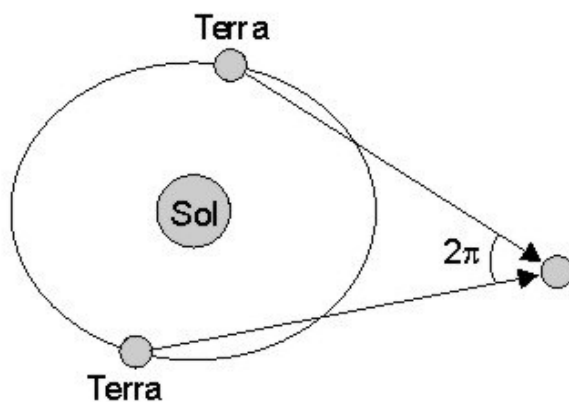


Figura I.4.14 – *Paralaxe heliocêntrica: os pontos de visada agora se situam em extremos opostos da órbita terrestre.*

A distância média da Terra ao Sol é chamada de unidade astronômica (UA). Em termos de quilômetros temos: $1 \text{ UA} = 1,5 \times 10^8 \text{ km}$. Esta distância é muito maior do que o raio da Terra, o que faz com que, para um determinado objeto cuja distância se deseja medir, o paralaxe heliocêntrico seja sempre maior do que o geocêntrico. Em termos mais técnicos e com base nas definições já apresentadas, podemos dizer que fixada uma distância, π será tanto maior quanto maior for a linha

de base usada para medi-lo. E, mantida a linha de base, o paralaxe decresce com a distância ao objeto.

Uma unidade de distância bem maior do que a unidade astronômica, o *parsec* (pc), é definida como a distância à qual um segmento de reta de 1 UA (o sistema Terra-Sol, por exemplo) cobre um ângulo de 1" no céu. Novamente podemos exprimir o *parsec* usando unidades mais mundanas: $1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{13} \text{ km}$. Note que a definição do *parsec* está intimamente ligada ao conceito de paralaxe heliocêntrico, pois 1 pc na verdade é a distância à qual está um objeto cujo paralaxe heliocêntrico é $\pi = 1''$. O próprio nome *parsec* representa abreviação das palavras paralaxe e segundo. A partir do *parsec* podem-se definir unidades ainda maiores de distância, como o *kiloparsec* (1 kpc = 10^3 pc) ou o *megaparsec* (1 Mpc = 10^6 pc). Estas são também usadas em Astronomia, principalmente em Astronomia Galáctica e Extragaláctica. O ano-luz (AL), a distância percorrida pela luz em um ano, às vezes é usada, principalmente em divulgação astronômica. Mas raramente se vê distâncias expressas em anos-luz em trabalhos profissionais da área. $1 \text{ AL} = 9,46 \times 10^{12} \text{ km} \sim 1/3 \text{ parsec}$.

Na figura I.4.15 vemos representado o efeito de paralaxe heliocêntrico. Analogamente ao paralaxe horizontal, o paralaxe heliocêntrico é o deslocamento angular de uma estrela com relação às outras ao fundo, quando a posição desta é anotada de dois pontos da órbita da Terra diametralmente opostos.

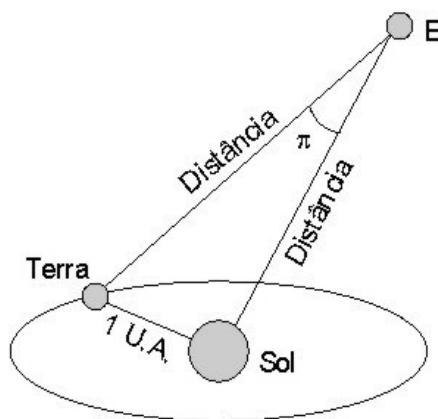


Figura I.4.15 – Representação do paralaxe π de uma estrela (E) em função da distância Terra–Sol (1 UA) e da distância à estrela.

Representando novamente o paralaxe heliocêntrico por π , vemos que existe uma expressão bem simples relacionando-o com a distância à estrela.

$$\tan(\pi) = 1 \frac{\text{UA}}{d}$$

Como para ângulos pequenos ($\ll 1 \text{ rad}$) a tangente é numericamente igual ao próprio ângulo expresso em radianos, temos que:

$$\tan(\pi) = \pi \text{ (rad)} = 1 \frac{UA}{d}.$$

Como antecipado, a definição de paralaxe dada acima usa como linha de base o diâmetro da órbita da Terra em torno do Sol. Se usarmos a definição de *parsec*, a expressão acima se simplifica ainda mais:

$$p \text{ (seg. arco)} = \frac{1}{d} \text{ (pc)}$$

Vale notar que o valor de π acima representa o deslocamento da estrela quando observada em dois dias do ano separados por 6 meses. De um dia para o outro o deslocamento na posição de um astro devido ao movimento orbital da Terra é muito menor. Na verdade, como esta última descreve uma elipse em torno do Sol, o reflexo deste movimento na posição de estrelas próximas será também uma elipse cujo eixo maior é dado por 2π . A posição da estrela, portanto, varia continuamente e com periodicidade de um ano.

Movimentos Próprios

Embora as estrelas pareçam estar fixas no céu, elas na verdade se movem no espaço com velocidades altas, da ordem de dezenas ou centenas de km/s. Suas distâncias gigantescas fazem com que estes movimentos sejam quase imperceptíveis a um observador na Terra. O movimento aparente das estrelas no céu, reflexo de seu movimento no espaço, embora pequeno, é mensurável. A ele chamamos de *movimento próprio* e o representamos pela letra grega μ .

Para melhor entendermos o que é o movimento próprio, consideremos a figura I.4.16. Nela temos representado as posições de um observador em O e de uma estrela em E. Também está representado, por uma seta, o vetor velocidade espacial da estrela (V). O comprimento da seta é uma medida do módulo da velocidade, sendo que a seta aponta a direção de movimento da estrela. Este movimento é devido ao campo gravitacional interno da nossa Galáxia, a Via-Láctea, que impõe a cada estrela ou objeto a ela pertencente uma aceleração e uma velocidade resultantes.

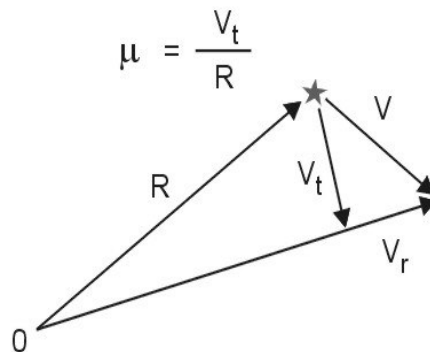


Figura I.4.16 – *Decomposição do movimento espacial de uma estrela em seus componentes radial e tangencial.*

A velocidade da estrela, conforme mostrado na figura, pode ser então decomposta em um componente ao longo da linha de visada, a velocidade radial (V_r) e um componente perpendicular à linha de visada, a velocidade tangencial ou transversal (V_t). Ambos os componentes são mensuráveis e muito importantes para se determinar a forma como as estrelas se movem no interior da Galáxia e, a partir daí, estudar a dinâmica da Via-Láctea e mesmo determinar sua massa. O componente radial da velocidade leva a uma alteração na distância que separa o observador da estrela. V_r pode ser medido pelo Efeito Doppler, pelo qual a frequência das ondas de luz aumenta (diminui) quando a fonte que as emite se aproxima (afasta) do observador. Note que este componente, não leva a uma mudança na direção no espaço na qual se encontra a fonte. Assim, o componente mais relevante para a Astronomia de Posição é o tangencial, que dividido pela distância à fonte, resulta na velocidade angular com que esta se desloca na esfera celeste. Ou seja, o movimento próprio pode ser matematicamente expresso como $\mu = V_t / R$

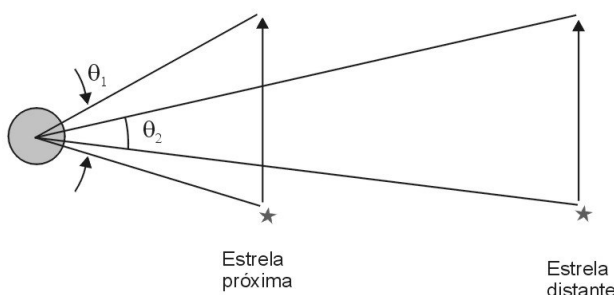


Figura I.4.17 – Dependência do movimento próprio com a distância: objetos mais distantes têm valores menores de μ se fixada a velocidade tangencial.

As estrelas mais próximas apresentam em geral movimentos próprios maiores. A figura I.4.17 reflete este fato. Para uma mesma velocidade tangencial, o movimento próprio será tanto maior quanto mais próxima estiver a estrela. Naturalmente isso também pode ser entendido matematicamente, levando-se em conta a fórmula para μ dada acima. A estrela com maior movimento próprio é a estrela de *Barnard*. Ela se desloca no céu por um ângulo de 10'' a cada ano. Trata-se também de uma das estrelas mais vizinhas ao Sistema Solar. Somente algumas estrelas possuem movimentos próprios maiores do que 1'' ao ano. Assim, a forma das constelações que as estrelas delineiam no céu pouco se altera com o tempo. No diagrama abaixo (figura I.4.18) vemos a forma de uma constelação boreal, a Ursa Maior, no presente (parte superior) e daqui a 10.000 anos.

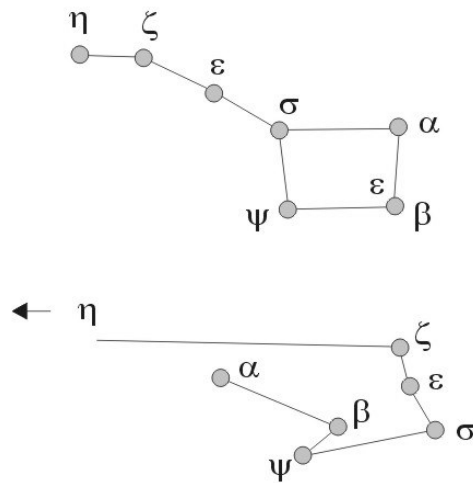


Figura I.4.18 – *Resultado do movimento próprio das estrelas da constelação da Ursa Maior decorrido um período de 10 milênios.*

Note que nosso Sol também se move no interior de nossa Galáxia, carregando consigo seus nove planetas e corpos menores. Assim sendo, na direção do movimento do Sol, as estrelas parecem estar divergindo de um ponto à nossa frente, chamado de *ápex*. Na direção contrária, elas parecem convergir para um ponto, chamado de *anti-ápex*. O efeito é semelhante ao de um automóvel em uma estrada; as bordas da estrada à nossa frente parecem se abrir à medida que avançamos, enquanto que atrás de nós elas parecem se fechar.

Catálogos de Estrelas e Atlas na Web

Posições de estrelas corrigidas para todos ou parte dos efeitos citados neste capítulo podem ser obtidas em catálogos estelares. Comumente estes catálogos listam uma posição média para uma determinada época (por exemplo, 1950,0 ou 2000,5). Neste caso, estas posições estão corrigidas apenas para precessão e movimento próprio, que são efeitos de mais longo prazo. Os efeitos de aberração e paralaxe heliocêntrico tem periodicidade anual e têm que ser incorporados quando se deseja fazer medidas precisas de posição em um determinado dia. Note que nem todas as estrelas têm distâncias e movimentos próprios conhecidos, o que impede que os efeitos de paralaxe e movimento próprio sejam incorporados em suas coordenadas. Uma lista de catálogos estelares está disponível pela Internet em:

<http://simbad.u-strasbg.fr/Simbad> ou <http://simbad.harvard.edu/Simbad>

Fotografias e imagens de diferentes campos do céu podem ser encontradas em:

http://archive.stsci.edu/dss/dss_form.html

Há ainda o *Apparent Places of Stars*, que lista as posições de estrelas de referência de 10 em 10 dias do ano, levando em conta todos os efeitos, exceto pela nutação de curto período e refração. Efeitos de refração dependem da densidade e temperatura do ar e, portanto, não são incorporados

nas coordenadas listadas para as estrelas de um catálogo. Na próxima seção apresentamos fórmulas gerais que permitem corrigir as coordenadas equatoriais de um astro para os diferentes efeitos.

Redução das coordenadas astronômicas (de coordenadas médias para aparentes)

Vimos neste capítulo que há vários componentes de movimento, seja do eixo de rotação, dos pólos celestes ou dos próprios astros no céu, que levam à variação contínua e periódica de suas coordenadas equatoriais. Esses componentes de movimento incluem a precessão, a nutação, os movimentos do pólo, a aberração, paralaxe, movimento próprio e refração. A maioria destes componentes pode ser modelada e descrita por intermédio de fórmulas matemáticas ou pelo menos tabelados em efemérides. O cálculo das coordenadas de uma estrela para um dado instante, levando em conta estes fatores, é chamado de redução das coordenadas. Geralmente, dividimos o problema em duas partes: redução ao ano e redução ao dia.

Na redução ao ano, transformamos as coordenadas listadas em um catálogo, que se referem a um equinócio redondo, como 1950,0 ou 2000,0, em coordenadas para o equinócio referente ao início ou metade do ano corrente (ou seja, 1999,0 ou 2000,5, por exemplo). Essas transformações levam em conta apenas a precessão geral do eixo de rotação e o movimento próprio da estrela no intervalo de tempo decorrido. Elas são do tipo:

$$\Delta\alpha = \Delta T v + \frac{(\Delta T)^2 v'}{200} + \frac{(\Delta T)^3 v''}{10^6}$$

$$\Delta\alpha = \Delta T v + \frac{(\Delta T)^2 v'}{200} + \frac{(\Delta T)^3 v''}{10^6}$$

onde v , v' e v'' são termos listados nos próprios catálogos de coordenadas e ΔT é o intervalo de tempo entre o equinócio do catálogo e o do ano corrente.

Na redução ao dia levamos em conta as variações devidas à nutação, à aberração, ao paralaxe e também à precessão e ao movimento próprio residuais entre o equinócio do meio do ano e o dia considerado.

No *Astronomical Almanac*, por exemplo, encontramos fórmulas para a redução ao dia do tipo:

$$\Delta\alpha = Aa + Bb + Cc + Dd + E + J \tan^2(\delta)$$

$$\Delta\delta = Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + J' \tan(\delta)$$

onde A , B , C , D , E , J e J' são os números Besselianos, geralmente expressos em segundos de arco (exceto por E e J , expressos em s), listados para cada dia do ano. Já a , b , c , d , a' , b' , c' e d' são as chamadas constantes Besselianas da estrela, que dependem de suas coordenadas equatoriais médias (determinadas a partir de um catálogo pela redução ao ano):

$$a = \frac{m}{n} + \sin(\alpha) \tan(\delta)$$

$$b = \cos(\alpha) \tan(\delta)$$

$$c = \cos(\alpha) \sec(\delta)$$

$$d = \sin(\alpha) \sec(\delta)$$

$$a' = \cos(\alpha)$$

$$b' = -\sin(\alpha)$$

$$c' = \tan(\alpha) \cos(\delta) - \sin(\delta) \sin(\alpha)$$

$$d' = \cos(\alpha) \sin(\delta)$$

Os números Besselianos variam com o dia do ano e são tabelados no *Astronomical Almanac*.

Tabela do Astronomical Almanac com os números Besselianos

Na Figura I.4.19, a data (dia e mês) é dada na 1ª coluna. Os termos de correção para nutação ($d\epsilon$ e $d\lambda$) são listados em seguida. A obliquidade da eclíptica é dada na 4ª coluna e os números Besselianos A, B, C, D, e E se seguem. Finalmente, a última coluna lista a fração do ano decorrida com relação ao equinócio médio.

FOR 0^h TERRESTRIAL TIME

Date	Nutation		Obl. of	Besselian Day Numbers					Fraction
0 ^h TT	in	in	Ecliptic	for Mean Equinox J2001.5					of Year
	Long.	Obl.	23° 26'	A	B	C	D	E	τ
	"	"	"	"	"	"	"	(0 ⁰⁰⁰⁰¹)	
Feb. 15	-15-631	-1-804	19-118	-13-756	+1-804	-15-728	+11-678	-22	-0-3761
16	-15-622	-1-816	19-105	-13-697	+1-816	-15-910	+11-377	-22	-0-3734
17	-15-586	-1-817	19-102	-13-628	+1-817	-16-088	+11-071	-22	-0-3706
18	-15-536	-1-806	19-112	-13-554	+1-806	-16-261	+10-762	-22	-0-3679
19	-15-488	-1-779	19-138	-13-479	+1-779	-16-428	+10-450	-22	-0-3652
20	-15-453	-1-738	19-177	-13-411	+1-738	-16-591	+10-134	-22	-0-3624
21	-15-443	-1-686	19-228	-13-352	+1-686	-16-748	+9-815	-22	-0-3597
22	-15-466	-1-628	19-285	-13-306	+1-628	-16-899	+9-493	-22	-0-3569
23	-15-526	-1-568	19-343	-13-275	+1-568	-17-045	+9-168	-22	-0-3542
24	-15-620	-1-514	19-396	-13-258	+1-514	-17-186	+8-841	-22	-0-3515
25	-15-741	-1-470	19-439	-13-251	+1-470	-17-320	+8-510	-22	-0-3487
26	-15-876	-1-442	19-466	-13-250	+1-442	-17-449	+8-177	-22	-0-3460
27	-16-010	-1-430	19-476	-13-248	+1-430	-17-573	+7-842	-22	-0-3433
28	-16-126	-1-435	19-470	-13-239	+1-435	-17-690	+7-505	-22	-0-3405
Mar. 1	-16-207	-1-452	19-452	-13-217	+1-452	-17-802	+7-166	-23	-0-3378
2	-16-242	-1-475	19-427	-13-176	+1-475	-17-908	+6-826	-23	-0-3350
3	-16-227	-1-495	19-406	-13-115	+1-495	-18-008	+6-484	-23	-0-3323
4	-16-168	-1-503	19-397	-13-037	+1-503	-18-102	+6-140	-23	-0-3296
5	-16-084	-1-490	19-409	-12-948	+1-490	-18-191	+5-796	-22	-0-3268
6	-16-001	-1-452	19-445	-12-860	+1-452	-18-274	+5-451	-22	-0-3241
7	-15-950	-1-393	19-503	-12-785	+1-393	-18-352	+5-104	-22	-0-3214
8	-15-956	-1-322	19-573	-12-733	+1-322	-18-424	+4-757	-22	-0-3186
9	-16-028	-1-253	19-641	-12-707	+1-253	-18-492	+4-409	-22	-0-3159
10	-16-153	-1-201	19-691	-12-702	+1-201	-18-554	+4-060	-22	-0-3131
11	-16-303	-1-176	19-715	-12-706	+1-176	-18-611	+3-711	-23	-0-3104
12	-16-447	-1-177	19-713	-12-709	+1-177	-18-663	+3-360	-23	-0-3077
13	-16-558	-1-198	19-691	-12-698	+1-198	-18-709	+3-008	-23	-0-3049
14	-16-626	-1-229	19-659	-12-670	+1-229	-18-751	+2-656	-23	-0-3022
15	-16-651	-1-259	19-627	-12-625	+1-259	-18-786	+2-302	-23	-0-2995
16	-16-642	-1-280	19-604	-12-567	+1-280	-18-817	+1-948	-23	-0-2967
17	-16-614	-1-289	19-595	-12-501	+1-289	-18-841	+1-593	-23	-0-2940
18	-16-583	-1-282	19-600	-12-433	+1-282	-18-860	+1-237	-23	-0-2912
19	-16-562	-1-260	19-620	-12-370	+1-260	-18-874	+0-881	-23	-0-2885
20	-16-563	-1-227	19-653	-12-316	+1-227	-18-881	+0-525	-23	-0-2858
21	-16-596	-1-186	19-692	-12-274	+1-186	-18-882	+0-168	-23	-0-2830
22	-16-663	-1-142	19-735	-12-246	+1-142	-18-878	+0-188	-23	-0-2803
23	-16-765	-1-103	19-773	-12-231	+1-103	-18-868	+0-544	-23	-0-2775
24	-16-895	-1-073	19-801	-12-228	+1-073	-18-851	+0-900	-24	-0-2748
25	-17-042	-1-058	19-816	-12-232	+1-058	-18-829	+1-256	-24	-0-2721
26	-17-191	-1-059	19-812	-12-236	+1-059	-18-801	+1-611	-24	-0-2693
27	-17-323	-1-079	19-792	-12-234	+1-079	-18-767	+1-965	-24	-0-2666
28	-17-422	-1-112	19-757	-12-219	+1-112	-18-727	+2-318	-24	-0-2639
29	-17-476	-1-153	19-715	-12-185	+1-153	-18-681	+2-669	-24	-0-2611
30	-17-479	-1-193	19-674	-12-131	+1-193	-18-629	+3-020	-24	-0-2584
31	-17-436	-1-222	19-643	-12-060	+1-222	-18-572	+3-368	-24	-0-2556
Apr. 1	-17-365	-1-233	19-631	-11-976	+1-233	-18-509	+3-715	-24	-0-2529
2	-17-289	-1-221	19-642	-11-891	+1-221	-18-441	+4-060	-24	-0-2502

Figura I.4.19 – Tabela do Astronomical Almanac com os números Besselianos.

Tabela com valores dos números Besselianos de 2ª ordem

Na Figura I.4.20, os valores de J (ou J') são dados no miolo da tabela. Dia e mês são listados na 1ª coluna, à esquerda, em intervalos de 10 dias. A hora do dia é dada na 1a linha. As unidades em que são expressos os valores e a expressão em que eles entram são dados no final da tabela.

J' for SOUTHERN DECLINATIONS
FOR 0^h TT AND EQUINOX J2001-5

		Right Ascension												
Date		0 ^h 12 ^h	1 ^h 13 ^h	2 ^h 14 ^h	3 ^h 15 ^h	4 ^h 16 ^h	5 ^h 17 ^h	6 ^h 18 ^h	7 ^h 19 ^h	8 ^h 20 ^h	9 ^h 21 ^h	10 ^h 22 ^h	11 ^h 23 ^h	12 ^h 24 ^h
Jan.	-9	0	-1	-6	-15	-24	-31	-35	-34	-29	-21	-12	-4	0
	1	-1	0	-4	-11	-20	-28	-33	-34	-30	-23	-14	-6	-1
	11	-2	0	-2	-8	-16	-24	-30	-32	-30	-24	-16	-8	-2
	21	-4	0	-1	-5	-12	-20	-26	-30	-29	-25	-18	-10	-4
	31	-5	-1	0	-3	-9	-16	-22	-26	-27	-24	-19	-12	-5
Feb.	10	-7	-2	0	-1	-6	-11	-18	-22	-24	-23	-19	-13	-7
	20	-8	-3	0	0	-3	-8	-13	-18	-21	-21	-19	-14	-8
Mar.	2	-9	-4	-1	0	-1	-5	-10	-14	-18	-19	-17	-14	-9
	12	-10	-5	-2	0	0	-3	-6	-10	-14	-16	-15	-13	-10
	22	-10	-6	-3	-1	0	-1	-4	-7	-10	-12	-13	-12	-10
Apr.	1	-9	-7	-4	-2	0	0	-2	-4	-7	-10	-11	-11	-9
	11	-9	-7	-5	-2	-1	0	-1	-2	-4	-7	-8	-9	-9
	21	-7	-7	-5	-3	-2	0	0	-1	-2	-4	-6	-7	-7
May	1	-6	-6	-5	-4	-2	-1	0	0	-1	-2	-4	-5	-6
	11	-4	-5	-5	-4	-3	-2	-1	0	0	-1	-2	-3	-4
	21	-3	-4	-4	-4	-4	-3	-1	-1	0	0	-1	-2	-3
	31	-2	-3	-4	-4	-4	-3	-2	-1	-1	0	0	-1	-2
June	10	-1	-2	-3	-3	-4	-4	-3	-2	-1	-1	0	0	-1
	20	0	-1	-2	-3	-3	-4	-4	-3	-2	-1	0	0	0
	30	0	0	-1	-2	-3	-4	-4	-4	-3	-3	-1	-1	0
July	10	0	0	0	-1	-2	-3	-4	-5	-4	-4	-3	-1	0
	20	-1	0	0	0	-1	-2	-4	-5	-5	-5	-4	-3	-1
	30	-3	-1	0	0	0	-2	-3	-4	-5	-6	-5	-4	-3
Aug.	9	-4	-3	-1	0	0	-1	-2	-4	-5	-6	-6	-6	-4
	19	-6	-4	-2	-1	0	0	-1	-3	-5	-6	-7	-7	-6
	29	-7	-6	-4	-2	0	0	-1	-2	-4	-6	-7	-8	-7
Sept.	8	-8	-7	-5	-3	-1	0	0	-1	-3	-5	-7	-8	-8
	18	-9	-9	-7	-5	-3	-1	0	0	-2	-4	-6	-8	-9
	28	-9	-9	-8	-7	-4	-2	0	0	-1	-3	-5	-7	-9
Oct.	8	-8	-9	-9	-8	-6	-3	-1	0	0	-1	-4	-6	-8
	18	-7	-9	-10	-9	-8	-5	-3	-1	0	-1	-2	-5	-7
	28	-6	-8	-10	-10	-9	-7	-4	-2	0	0	-1	-3	-6
Nov.	7	-4	-7	-9	-10	-9	-8	-6	-3	-1	0	0	-2	-4
	17	-3	-5	-8	-9	-10	-9	-7	-4	-2	0	0	-1	-3
	27	-2	-4	-6	-8	-8	-9	-8	-6	-3	-1	0	0	-2
Dec.	7	-1	-2	-4	-7	-8	-9	-8	-7	-4	-2	-1	0	-1
	17	0	-1	-3	-5	-7	-8	-8	-7	-6	-4	-2	0	0
	27	0	0	-1	-3	-5	-7	-8	-8	-6	-5	-3	-1	0
	37	-1	0	0	-2	-3	-5	-6	-7	-7	-5	-4	-2	-1

The second-order day number J' is given in this table in units of 0^h0001.
The apparent declination of a star is given by:

$$\delta = \delta_1 + \tau \mu_\delta / 100 + Aa' + Bb' + Cc' + J' \tan \delta_1$$

where the declination (δ_1) and centennial proper motion in declination (μ_δ) are referred to the mean equator and equinox of J2001-5

Figura I.4.20 – Tabela com valores dos números Besselianos de 2^a ordem.

As fórmulas acima incorporam apenas correções para precessão residual, nutação e aberração anual. Os coeficientes m e n no cálculo de a são aqueles que entram na correção da ascensão reta para precessão, dada no início deste capítulo; seus valores são $m = 3,075$ s/ano e $n = 1,336$ s/ano. Já ϵ na expressão para c' acima é o valor da obliquidade da eclíptica. O componente de paralaxe é dado pela fórmula:

$$\Delta\alpha = \pi X d - \pi Y c$$

$$\Delta\delta = \pi X d' - \pi Y c'$$

onde X e Y são coordenadas cartesianas da Terra com origem no Baricentro do Sistema Solar e π é o paralaxe heliocêntrico da estrela. Obviamente, à medida que a Terra órbita em torno do Sol, X e Y variam; assim seus valores são também listados diariamente pelo *Astronomical Almanac*.

Tabela do Astronomical Almanac com os valores das coordenadas cartesianas X, Y, Z

Na Figura I.4.21, a data é dada na 1ª coluna, seguida dos valores de X,Y,Z e de suas derivadas no tempo.

B46		POSITION AND VELOCITY OF THE EARTH, 2001					
		ORIGIN AT SOLAR SYSTEM BARYCENTRE					
		MEAN EQUATOR AND EQUINOX J2000-0					
Date 0 ^h TDB		X	Y	Z	$\dot{X}$	$\dot{Y}$	$\dot{Z}$
Feb.	15	-0-826 580 889	+0-497 350 454	+0-215 783 988	- 980 8411	-1319 8985	- 572 2212
	16	-0-836 262 985	+0-484 074 441	+0-210 028 436	- 955 5258	-1335 2365	- 578 8602
	17	-0-845 690 373	+0-470 647 094	+0-204 207 369	- 929 9007	-1350 1634	- 585 3237
	18	-0-854 859 996	+0-457 072 577	+0-198 322 561	- 903 9744	-1364 6689	- 591 6076
	19	-0-863 768 889	+0-443 355 153	+0-192 375 830	- 877 7565	-1378 7434	- 597 7077
	20	-0-872 414 187	+0-429 499 175	+0-186 369 033	- 851 2572	-1392 3780	- 603 6201
	21	-0-880 793 131	+0-415 509 087	+0-180 304 066	- 824 4874	-1405 5643	- 609 3411
	22	-0-888 903 073	+0-401 389 410	+0-174 182 861	- 797 4589	-1418 2944	- 614 8671
	23	-0-896 741 489	+0-387 144 745	+0-168 007 385	- 770 1843	-1430 5609	- 620 1946
	24	-0-904 305 982	+0-372 779 760	+0-161 779 641	- 742 6768	-1442 3572	- 625 3205
	25	-0-911 594 295	+0-358 299 187	+0-155 501 658	- 714 9506	-1453 6776	- 630 2417
	26	-0-918 604 314	+0-343 707 810	+0-149 175 497	- 687 0205	-1464 5173	- 634 9558
	27	-0-925 334 078	+0-329 010 455	+0-142 803 240	- 658 9022	-1474 8727	- 639 4605
	28	-0-931 781 783	+0-314 211 977	+0-136 386 991	- 630 6114	-1484 7416	- 643 7541
	Mar. 1	-0-937 945 785	+0-299 317 248	+0-129 928 865	- 602 1644	-1494 1230	- 647 8357
	2	-0-943 824 606	+0-284 331 141	+0-123 430 987	- 573 5777	-1503 0176	- 651 7046
	3	-0-949 416 927	+0-269 258 510	+0-116 895 480	- 544 8673	-1511 4282	- 655 3613
	4	-0-954 721 593	+0-254 104 176	+0-110 324 464	- 516 0490	-1519 3591	- 658 8070
	5	-0-959 737 595	+0-238 872 905	+0-103 720 037	- 487 1370	-1526 8171	- 662 0438
	6	-0-964 464 060	+0-223 569 382	+0-097 084 273	- 458 1432	-1533 8110	- 665 0751
	7	-0-968 900 217	+0-208 198 198	+0-090 419 206	- 429 0764	-1540 3509	- 667 9050
	8	-0-973 045 359	+0-192 763 843	+0-083 726 828	- 399 9408	-1546 4470	- 670 5382
	9	-0-976 898 803	+0-177 270 709	+0-077 009 083	- 370 7363	-1552 1078	- 672 9790
	10	-0-980 459 844	+0-161 723 122	+0-070 267 879	- 341 4595	-1557 3381	- 675 2305
	11	-0-983 727 735	+0-146 125 378	+0-063 505 099	- 312 1055	-1562 1386	- 677 2943
	12	-0-986 701 683	+0-130 481 794	+0-056 722 619	- 282 6703	-1566 5054	- 679 1701
	13	-0-989 380 866	+0-114 796 740	+0-049 922 330	- 253 1525	-1570 4314	- 680 8560
	14	-0-991 764 465	+0-099 074 665	+0-043 106 143	- 223 5540	-1573 9079	- 682 3490
	15	-0-993 851 695	+0-083 320 109	+0-036 276 002	- 193 8800	-1576 9262	- 683 6461
	16	-0-995 641 839	+0-067 537 697	+0-029 433 885	- 164 1382	-1579 4781	- 684 7439
	17	-0-997 134 264	+0-051 732 126	+0-022 581 797	- 134 3379	-1581 5566	- 685 6397
	18	-0-998 328 437	+0-035 908 162	+0-015 721 774	- 104 4897	-1583 1559	- 686 3308
	19	-0-999 223 934	+0-020 070 621	+0-008 855 871	- 74 6046	-1584 2712	- 686 8151
	20	-0-999 820 445	+0-004 224 367	+0-001 986 169	- 44 6944	-1584 8981	- 687 0906
	21	-1-000 117 777	-0-011 625 702	-0-004 885 239	- 14 7708	-1585 0333	- 687 1556
	22	-1-000 115 859	-0-027 474 649	-0-011 756 237	+ 15 1535	-1584 6735	- 687 0086
	23	-0-999 814 747	-0-043 317 513	-0-018 624 699	+ 45 0656	-1583 8161	- 686 6480
	24	-0-999 214 634	-0-059 149 307	-0-025 488 481	+ 74 9515	-1582 4593	- 686 0726
	25	-0-998 315 854	-0-074 965 030	-0-032 345 432	+ 104 7966	-1580 6018	- 685 2814
	26	-0-997 118 891	-0-090 759 674	-0-039 193 389	+ 134 5854	-1578 2437	- 684 2739
	27	-0-995 624 387	-0-106 528 240	-0-046 030 188	+ 164 3019	-1575 3865	- 683 0499
	28	-0-993 833 148	-0-122 265 751	-0-052 853 667	+ 193 9299	-1572 0333	- 681 6101
	29	-0-991 746 139	-0-137 967 269	-0-059 661 674	+ 223 4531	-1568 1891	- 679 9558
	30	-0-989 364 487	-0-153 627 918	-0-066 452 075	+ 252 8559	-1563 8606	- 678 0892
	31	-0-986 689 470	-0-169 242 896	-0-073 222 760	+ 282 1239	-1559 0565	- 676 0134
	Apr. 1	-0-983 722 502	-0-184 807 497	-0-079 971 658	+ 311 2441	-1553 7870	- 673 7322
	2	-0-980 465 117	-0-200 317 124	-0-086 696 735	+ 340 2057	-1548 0638	- 671 2503

$\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ are in units of 10^{-9} au / d.

Figura I.4.21 – Tabela do Astronomical Almanac com os valores das coordenadas cartesianas X, Y, Z.

Finalmente, temos o movimento próprio residual entre o equinócio do meio do ano e o dia considerado:

$$\Delta\alpha = \tau \mu_{\alpha}$$

$$\Delta\delta = \tau \mu_{\delta}$$

onde τ , μ_α , μ_δ , são, respectivamente, a fração do ano decorrido entre o meio do ano e o dia considerado e os componentes em ascensão reta e declinação do movimento próprio da estrela, expressos em "/ano.

A soma das 3 componentes de $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ dadas acima nos dá a redução ao dia. As coordenadas resultantes dessas correções são chamadas de coordenadas aparentes ou verdadeiras, em contraposição às coordenadas médias listadas nos catálogos. Sobre as coordenadas verdadeiras podemos ainda incorporar o efeito da refração atmosférica, que, conforme descrito acima, depende da temperatura e pressão ambientes (tabelas quantificando esse efeito são encontradas, por exemplo, nas Efemérides Astronômicas do Observatório Nacional), transformando-as assim em coordenadas observadas.

CAPÍTULO 5

PRÁTICAS DE DETERMINAÇÃO ASTRONÔMICA

Roteiro para preparação de relatório de prática astronômica

Considerações gerais: o relatório deve ser sucinto. Ou seja, não há necessidade de escrever frases intermináveis e com pouca ou nenhuma informação. Por outro lado, sucinto não significa incompleto. Procure fazer do relatório algo que sirva como roteiro para que outras pessoas possam repetir o que foi feito, passo a passo. Ou seja, não pode haver lacunas na descrição das diferentes etapas do trabalho ou erros na descrição da sequência com que ele foi feito.

A apresentação do relatório também conta: um texto sem rasuras, escrito em boa caligrafia (ou digitado em computador ou máquina de escrever) e enriquecido com tabelas, fórmulas e figuras certamente ajuda.

Quanto à ordem, ela deve seguir aproximadamente o seguinte ordenamento:

- 1 – Uma definição clara do(s) objetivo(s). Em outras palavras, o que se procura determinar com o trabalho (A hora sideral? A latitude do observador? O azimute de um mira? Etc);
- 2 – Método de determinação: uma descrição teórica das medidas que têm que ser feitas, em que ordem e qual a relação entre o que se vai medir e o que se procura obter (objetivo);
- 3 – Preparação da observação: escolha de intervalos de hora e de coordenadas, escolha do(s) alvo(s);
- 4 – Preparo instrumental: montagem e nivelamento do teodolito; medidas de calibração e de correção instrumental;
- 5 – Processo de tomada de medidas; apresentação dos dados obtidos; correções às medidas;
- 6 – Análise dos dados; métodos matemáticos e/ou estatísticos para fins de obtenção dos objetivos. Valores obtidos e incertezas;
- 7 – Conclusões.

Roteiro para Montagem, Nivelamento e Calibração de Teodolito

Há muitas variedades de teodolitos, alguns para fins de Topografia e outros, com maior precisão, de uso em Astronomia. Este roteiro visa a descrever o uso dos teodolitos Wild T2, habitualmente utilizados nas práticas de determinação astronômica dos cursos ministrados pelo Departamento de Astronomia da UFRGS. Para uma descrição mais detalhada dos diferentes tipos de teodolito e suas diferentes aplicações recomendamos outras publicações, tais como o livro “Topografia e Astronomia de Posição para Arquitetos e Engenheiros”, de F. Domingues.

Os teodolitos devem, antes de tudo, ser manuseados com cuidado, regra que vale para qualquer instrumento ótico de precisão. Os Wild T2 são guardados no interior de uma cápsula metálica composta por uma base e uma cobertura, que podem ser destacadas uma da outra pelo acionamento de presilhas em forma de gancho situadas junto à base. Feito isso, retira-se então o teodolito e leva-se o mesmo para uma superfície plana no ponto de observação.

O passo seguinte consiste em nivelar o instrumento, ou seja, fazer com que a base do teodolito coincida com o plano horizontal do local de observação. O nivelamento é feito pelo acionamento de três parafusos calantes na base do teodolito e pela observação da posição de duas bolhas de ar: uma situada na base e a outra em uma trave no corpo do teodolito. Esta última bolha pertence ao plano da forquilha do teodolito, que por seu turno é perpendicular à base. O nivelamento se dá da seguinte forma: colocamos o plano da forquilha em paralelo a um par de parafusos calantes e os acionamos, sempre girando-os no mesmo sentido (horário ou anti-horário), até que a bolha na trave da forquilha esteja centrada. Depois giramos o corpo do teodolito em 90°, de forma que a trave aponte na direção do parafuso restante. Acionamos este parafuso até que a bolha seja centrada também nesta posição. Repetimos o mesmo procedimento para os demais pares de parafusos calantes, até que possamos girar o teodolito em qualquer direção sem que a bolha situada na trave seja descentrada. Nesta situação, a bolha da base também deverá estar bem centrada e imóvel, independentemente da posição do instrumento.

Em várias práticas de determinação de coordenadas astronômicas, faz-se necessário determinar valores de distância zenital. As leituras de posição vertical do teodolito sofrem de um erro, a que chamamos de erro zenital do instrumento. Este erro, z_0 , pode ser determinado por leitura verticais de uma mira fixa obtidas com a luneta do teodolito tanto na posição direta quanto inversa. Chamemos de L_{VD} e L_{VI} estas medidas, respectivamente. Teremos então:

$$z_0 = \frac{L_{VD} + L_{VI} - 360}{2}$$

Medidas empíricas de distância zenital podem então ser obtidas fazendo-se $z = L_V - z_0$, onde L_V é uma medida vertical de um objeto qualquer. Note que esta medida de z ainda não representa um valor absoluto de distância zenital, pois para isso necessita ser corrigido para refração atmosférica. Conforme vimos no Capítulo 4 da Parte I, esta correção é dada pela fórmula:

$$z_{\text{abs}} = z + R_m F$$

onde R_m e F são respectivamente o valor de refração média para a distância zenital observada e um fator de correção para temperatura e pressão. Ambos podem ser obtidos consultando-se as tabelas sobre o efeito de refração existentes, por exemplo, no Anuário Astronômico do Observatório Nacional (ON).

Para estimar o efeito da refração, podemos também usar a fórmula:

$$R = \frac{0,00452^\circ P(\text{mbar})}{[273 + T(^{\circ}\text{C})]\tan(h)}$$

onde R é o desvio causado pela refração (expresso em graus), h é a altura do objeto (também em graus), P é a pressão medida com um barômetro (em milibar) e T é a temperatura do ar em graus centígrados. A pressão atmosférica no nível do mar é $P_{\text{atm}} = 1.013 \text{ mbar}$.

1ª Prática

Determinação do meridiano astronômico e do azimute de uma mira usando a culminação de uma estrela

Uma estrela culmina quando sua altura atinge um valor extremo. Isso ocorre duas vezes ao longo do dia sideral: na culminação inferior, sua altura é mínima e na culminação superior sua altura é máxima. Esta última situação é a mais favorável para observá-la. Em ambas as culminações, a estrela está contida no plano meridiano do observador.

Uma outra vantagem de observarmos uma estrela durante sua culminação superior é o fato de que, neste caso, não precisamos de trigonometria esférica para estabelecermos relações entre as diferentes coordenadas da estrela e as coordenadas do observador. Todas as relações se simplificam imensamente, pois o triângulo esférico da estrela deixa de existir, já que pólos, zênite e estrela estão todos alinhados sobre o meridiano astronômico. Para observadores no hemisfério sul, por exemplo, se a estrela culmina a sul do zênite (ou seja com azimute $A = 180^\circ$), temos a seguinte relação entre sua declinação δ , sua distância zenital mínima z_{min} e a latitude ϕ do observador:

$$\delta = \phi - z_{\text{min}}$$

Caso a estrela culmine a norte do zênite ($A = 0^\circ$), podemos escrever:

$$\delta = \phi + z_{\text{min}}$$

A figura II.1 mostra a situação característica da culminação superior. A estrela K culmina a norte do zênite ($A = 0^\circ$) e a estrela V a sul ($A = 180^\circ$). Neste instante suas distâncias zenitais são mínimas, de valor z_k e z_v , respectivamente, tal como mostradas na figura. As duas equações acima são claramente válidas para V e K, respectivamente.

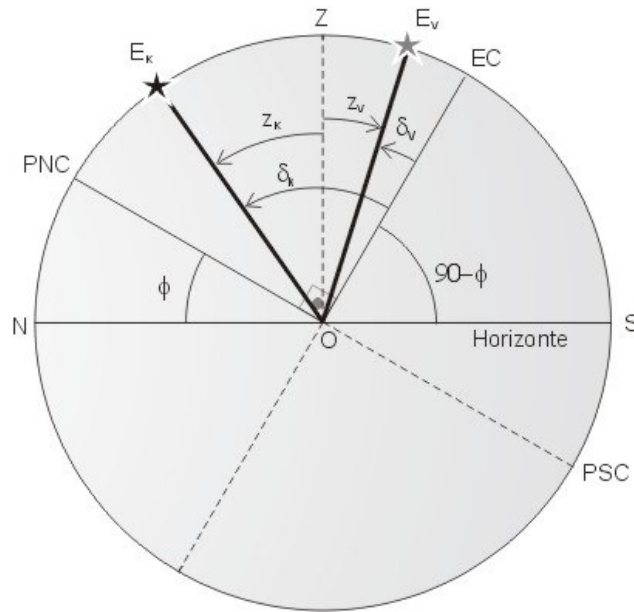


Figura II.1 – Diagrama do plano meridiano de um observador, mostrando duas estrelas: E_k , que culmina a norte do zênite (Z), e E_v , culminando a sul do zênite.

Basta, portanto, determinarmos o valor da distância zenital na culminação de uma estrela de declinação conhecida para determinarmos nossa latitude. Um problema, contudo, é sabermos o exato instante em que a estrela culmina. Isso é equivalente a determinarmos a direção norte-sul com precisão.

Uma maneira de determinar a posição do meridiano astronômico e nossa latitude sem conhecimento prévio de nenhum dos dois é observarmos uma estrela com um teodolito aproximadamente de meia hora antes até meia hora depois de sua culminação superior, anotando-lhe a leitura vertical L_V e a leitura horizontal L_H para diferentes instantes. Esperamos que os pontos $L_V \times L_H$, uma vez colocados em um gráfico, descrevam uma parábola. Ou seja, espera-se que eles satisfaçam uma relação do tipo:

$$L_V = a L_H^2 + b L_H + c$$

Se ajustarmos uma parábola a estes pontos, determinando os valores dos parâmetros a , b e c , podemos então inferir o valor de L_H para o qual L_V é mínimo. Basta tomarmos a derivada $\partial L_V / \partial L_H$ da parábola acima e a igualarmos a zero. Assim teremos:

$$L_H(L_{V\min}) = \frac{-b}{2a}$$

Sabemos que este valor de $L_H(L_{V\min})$ corresponde ao instante da passagem meridiana, tendo assim um azimuth de 0° ou de 180° , dependendo de a estrela culminar a norte ou a sul do zênite, respectivamente. Assim, qualquer outra leitura L_H que tenhamos, como por exemplo, a leitura de uma mira fixa qualquer, pode ser convertida em um valor de azimuth. Além disso, o valor mínimo

de L_V , obtido substituindo $-b/2a$ na parábola, nos permite determinar a latitude ϕ do ponto de observação. Este valor é:

$$L_{Vmin} = \frac{-b^2}{4a} + c$$

Previamente à noite de observação precisamos então definir estrelas que:

1) Culminem durante o intervalo disponível para o trabalho de campo.

Para escolhermos a(s) estrela(s) a ser(em) usada(s) temos então que seguir os seguintes passos:

A) Dada a longitude aproximada do local da observação e o intervalo de hora legal disponível para a mesma, obter o intervalo de hora sideral correspondente. Isso envolve uma transformação de hora legal para hora solar média local e uma conversão de hora solar média local em hora sideral. Sejam HL_1 e HL_2 os limites do intervalo de hora legal disponível para observação. Neste caso, os limites em hora solar média, M_1 e M_2 , correspondentes a estes dois instantes serão:

$$M_i = HL_i + (l_c - l)$$

onde $i=1,2$ e l_c e l são, respectivamente, a longitude do meridiano central do fuso horário onde se dá a observação e a longitude do observador.

Já a conversão de hora solar média local para hora sideral se faz pela equação:

$$S_i = S_0 + M_i(1 + h) + l h$$

onde S_0 é a hora sideral em Greenwich à $TU = 0h$ na data da observação, cujos valores, dia após dia, são listados no *Astronomical Almanac*, no Anuário do Observatório Nacional ou no *Apparent Places of Stars*.

B) Dado o intervalo em hora sideral, procurar estrelas que culminem dentro deste intervalo. Sabemos que a hora sideral em que uma estrela culmina é igual à sua ascensão reta (pois no meridiano o ângulo horário é nulo). Logo, com o auxílio de uma lista contendo as coordenadas equatoriais de várias estrelas, tudo que precisamos fazer é determinar que estrelas têm ascensão reta contida no intervalo de hora sideral definido no item A.

Procedimento Observacional

Uma vez definida(s) a(s) estrela(s), uma das primeiras coisas a serem feitas na noite de observação é identificá-la(s) no céu. Após a montagem e nivelamento do teodolito, então se procede à determinação do erro zenital, e à leitura horizontal de uma mira fixa cujo azimute queiramos determinar.

Uma vez feitas as calibrações, estamos prontos para fazer leituras horizontais e verticais da estrela com o teodolito para diferentes instantes, os quais devem ser anotados cuidadosamente. Note que valores de L_V precisam ser corrigidos para o erro zenital z_0 do teodolito e para refração, o que

exige conhecimento da temperatura e pressão atmosféricas. Só com estas correções podemos obter os valores de distância zenital, z , correspondentes às leituras verticais.

Os pontos z por L_H , tomados de meia hora antes até meia hora depois do instante previsto para a culminação, deverão formar uma parábola, sendo então possível, usando técnicas de ajuste, determinar o valor extremo $z_{\min}$. Este valor de distância zenital no instante da culminação nos permite assim determinar a latitude. Além disso, como o azimute neste instante é 0° ou 180° , temos também determinada a posição do nosso meridiano astronômico e do azimute da mira.

Exemplo

Tabelas de dados obtidos com o teodolito para a determinação da latitude usando a passagem meridiana de uma estrela. A primeira tabela contém leituras de uma mira fixa, para determinação do erro zenital do aparelho. A segunda contém os dados de $L_v \times L_h$. (Trabalho do aluno de Engenharia Cartográfica da UFRGS, Rafael dos Santos Genro):

Leituras Iniciais, com as quais torna-se possível calcular o erro do instrumento de medição (teodolito) na sua leitura vertical: Tais medições foram obtidas mirando para o alvo (torre de celular), da qual pretende-se descobrir o azimute.

Leitura	Ângulo Horizontal	Ângulo Vertical
1 (direta)	$89^\circ 22' 04,5''$	$L_{VD} = 87^\circ 30' 21''$
2 (inversa)	$269^\circ 21' 46''$	$L_{VI} = 272^\circ 18' 37''$

Ângulos horizontal e vertical coletados durante um intervalo de tempo de 30 minutos prévios e posteriores à culminação da estrela Beta Carina, tendo ocorrido tal culminação aproximadamente às 21h13min do dia em que foi feito o trabalho.

Medições	Ângulo Horizontal (L_H)	Ângulo Vertical (L_V)
1	$59^\circ 34' 17''$	$40^\circ 14' 23''$
2	$60^\circ 44' 53''$	$40^\circ 00' 02,5''$
3	$61^\circ 41' 58''$	$39^\circ 52' 30''$
4	$62^\circ 12' 53''$	$39^\circ 48' 41''$
5	$62^\circ 41' 52''$	$39^\circ 45' 04''$
6	$63^\circ 26' 59''$	$39^\circ 40' 52''$

7	64° 18' 45"	39° 37' 15"
8	64° 54' 01"	39° 35' 12"
9	65° 43' 13"	39° 33' 37"
10	66° 12' 45"	39° 32' 45"
11	66° 42' 11"	39° 33' 09"
12	67° 05' 38"	39° 33' 17"
13	67° 31' 57"	39° 34' 00"
14	68° 00' 53"	39° 34' 42"
15	68° 25' 45"	39° 36' 05"
16	68° 56' 11"	39° 38' 02"
17	69° 20' 40"	39° 39' 38"
18	69° 44' 33"	39° 41' 10"
19	70° 18' 03"	39° 44' 08"
20	70° 45' 47"	39° 48' 04"
21	71° 29' 19"	39° 53' 09"

Outras referências bibliográficas: Determinações Astronômicas, F. Hatschbach; Geodésica Elementar e Astronomia de Campo, J. Haertel; Notas de Aula de J.M. Arana.

2ª Prática

Determinação do meridiano astronômico e do azimute de uma mira usando uma estrela em elongação

Uma estrela está em elongação quando o ângulo do triângulo esférico de posição da estrela é retângulo na própria estrela. Chamemos o ângulo do vértice onde está a estrela de Q . Neste caso, a elongação é caracterizada por $Q = \pm 90^\circ$. A figura II.2 mostra uma estrela em elongação, sendo o triângulo de posição (mostrado em branco) reto na estrela.

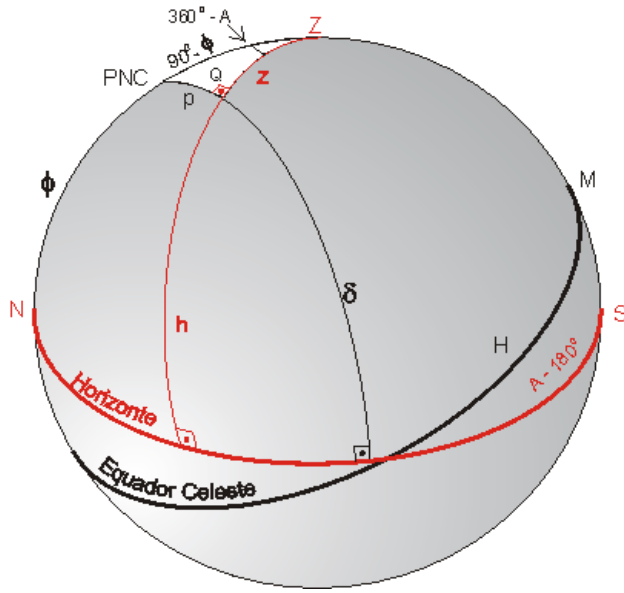


Figura II.2 – Triângulo de posição de uma estrela durante a elongação.

Nesta situação temos então as seguintes relações envolvendo os demais elementos do triângulo esférico:

$$\text{sen} A = \pm \frac{\cos \delta}{\cos \phi} \quad (1)$$

$$\cos z = \frac{\text{sen} \phi}{\text{sen} \delta} \quad (2)$$

$$\cos H = \frac{\tan \phi}{\tan \delta} \quad (3)$$

onde A é o azimuth da estrela, z sua distância zenital, H seu ângulo horário, δ a sua declinação e ϕ é a latitude do observador.

Como o módulo de um co-seno ou seno tem necessariamente que ser ≤ 1 , temos pelas relações acima que:

$$\left| \frac{\cos \delta}{\cos \phi} \right| \leq 1 \rightarrow |\cos \delta| \leq |\cos \phi| \rightarrow |\delta| \geq |\phi|$$

$$\left| \frac{\text{sen} \phi}{\text{sen} \delta} \right| \leq 1 \rightarrow |\text{sen} \phi| \leq |\text{sen} \delta| \rightarrow |\phi| \leq |\delta|$$

Além disso, para que a elongação se dê acima do horizonte é necessário que δ e ϕ tenham o mesmo sinal. Uma outra característica da situação de elongação é o fato de que o azimuth atinge um valor extremo neste instante. Assim, um gráfico de A x H (ou tempo) nos instantes que precedem e sucedem à elongação nos dará uma parábola cujo valor extremo (máximo ou mínimo) representa o azimuth da estrela ao elongar-se. Mas este último pode ser calculado usando a expressão (1) acima, desde que conhecidas a declinação da estrela e a latitude do observador. O sinal algébrico a ser usado na expressão (1) dependerá de ser a elongação oriental (a leste do meridiano, $0^\circ < A < 180^\circ$) ou ocidental (a oeste do meridiano, $180^\circ < A < 360^\circ$). Assim resulta que o acompanhamento de

uma estrela logo antes e depois da elongação nos permite determinar nosso meridiano e também o azimute de uma mira fixa.

Previamente à noite de observação precisamos então definir estrelas que:

1) Satisfazem as condições necessárias para elongar acima do horizonte: $|\delta| > |\phi|$; δ e ϕ ambas tendo o mesmo sinal.

2) E que tenham elongação ocorrendo durante o intervalo disponível para o trabalho de campo.

Para escolhermos a(s) estrela(s) a ser(em) usada(s) temos então que seguir os seguintes passos:

A) Dada a longitude aproximada do local da observação e o intervalo de hora legal disponível para a mesma, obter o intervalo de hora sideral correspondente. Isso envolve uma transformação de hora legal para hora solar local e uma conversão de hora solar local em hora sideral. Conforme já descrito anteriormente, se HL_1 e HL_2 são os limites do intervalo de hora legal disponível para observação, os limites em hora solar média, M_1 e M_2 , serão:

$$M_i = HL_i + (l_c - l)$$

onde $i = 1, 2$ e l_c e l são, respectivamente, a longitude do meridiano central do fuso horário onde se dá a observação e a longitude do observador.

Já a conversão de hora solar média local para hora sideral se faz pela equação:

$$S_i = S_0 + M_i(1 + h) + l h$$

onde S_0 é a hora sideral em Greenwich à $TU = 0h$ na data da observação, cujos valores, dia após dia, são listados no *Astronomical Almanac*, no Anuário do Observatório Nacional ou no *Apparent Places of Stars*.

B) Dado o intervalo em hora sideral, procurar estrelas que elonguem dentro deste intervalo. Isso é feito com o auxílio de uma lista contendo as coordenadas equatoriais de várias estrelas que satisfaçam os requisitos mínimos dados no item 1. O *Apparent Places of Stars* lista as coordenadas equatoriais de centenas de estrelas de referência, atualizadas de 10 em 10 dias para os efeitos de precessão, aberração, paralaxe, movimento próprio e nutação de longo período. Com a declinação δ da estrela candidata e a latitude ϕ do ponto de observação, usa-se a fórmula (3) para determinar o ângulo horário H de cada estrela ao elongar. Daí usa-se a expressão:

$$S = H + \alpha$$

Para determinar se a hora sideral em que estrela elonga está dentro do intervalo definido em A, onde α é a ascensão reta da estrela.

Procedimento Observacional

Uma vez definida(s) a(s) estrela(s), uma das primeiras coisas a serem feitas na noite de observação é identificá-la(s) no céu. Após a montagem e nivelamento do teodolito, então se procede à leitura horizontal de uma mira fixa. Como esta prática não envolve leituras verticais, não é necessário determinar o erro zenital do instrumento.

Uma vez feitas as calibrações, estamos prontos para fazer leituras horizontais (L_H) da estrela com o teodolito para diferentes instantes, os quais devem ser anotados cuidadosamente.

Os pontos L_H x t , tomados de meia hora antes até meia hora depois do instante previsto para a elongação, deverão formar uma parábola, sendo então possível, usando técnicas de ajuste já conhecidas, determinar o valor extremo da leitura horizontal L_{Hmax} . Este corresponderá ao azimute da estrela no instante da elongação, permitindo-se assim transformar leituras horizontais em determinações de A . Por exemplo, o valor de azimute de uma mira fixa será dado pela fórmula:

$$A_{mira} = L_{Hmira} + A_{est} - L_{Hmax}$$

onde L_{Hmira} é o valor da leitura horizontal da mira, medido com o teodolito, L_{Hmax} é obtido do ajuste aos pontos observados e A_{est} é o azimute da estrela calculado com a expressão (1).

Outras referências bibliográficas: Determinações Astronômicas, F. Hatschbach; Geodésica Elementar e Astronomia de Campo, J. Haertel; Notas de Aula de J.M. Arana.

Exemplo

Relatório de Prática de Determinação do Meridiano e do Azimute de uma Mira usando uma Estrela em Elongação

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Geociências

Disciplina: Astronomia Geodésica II

Código: FIS 02006

2ª Prática

Rafael Santos Genro Matrícula: 2795/97-7 Turma U

Professor Basílio Santiago

Período 01/01

O presente trabalho visa determinar o meridiano astronômico do observador e o azimute de uma mira fixa com o auxílio de uma estrela no momento de sua elongação.

O trabalho foi realizado no terraço do prédio da Física, o qual foi devidamente projetado para se instalar instrumentos de medição de coordenadas horizontais e verticais (teodolitos).

Feita a instalação do teodolito, com auxílio dos seus calantes, nivelou-se o mesmo e escolheu-se um alvo fixo qualquer, do qual pretende-se encontrar o azimute.

Coletaram-se ângulos horizontais e verticais do astro em um horário próximo de sua elongação, assim como a hora legal de cada observação, a fim de determinar-se posteriormente o ângulo horizontal (zerado em um ponto qualquer) da estrela e a hora legal no exato instante em que ela sofreu elongação, ou seja, ($Q = 90^\circ$).

Tendo o ângulo horizontal da estrela e a hora legal, referentes ao instante mencionado, torna-se fácil encontrar o desejado azimute do alvo, inclusive sendo possível encontrar o meridiano astronômico do observador. Posteriormente serão dados todos os passos para encontrarem-se tais incógnitas.

Quanto à escolha do astro para tal observação, sabendo-se a longitude aproximada do local da observação e o intervalo de hora legal disponível para a mesma, obtém-se o intervalo de hora sideral correspondente. Isso envolve uma transformação de hora legal para hora solar local e uma conversão de hora solar local em hora sideral. Descobrendo-se o intervalo em hora sideral, procuram-se estrelas que sofram elongação dentro deste intervalo. Logo, com o auxílio de uma lista contendo as coordenadas equatoriais de várias estrelas, tudo que se precisa fazer é determinar o ângulo horário em que a estrela sofre elongação, a fim de verificar se esta elongação ocorre no horário desejado; Tal ângulo calcula-se da seguinte maneira:

$$\cos(h) = \frac{\tan(\phi)}{\tan(\delta)}$$

onde ϕ é a latitude do observador e δ é a declinação da estrela.

– Astro: *Canopus* da Constelação de Carina.

$\delta = -52^\circ 42' 07''$

$\alpha = 6\text{h}23\text{min}55\text{s}$

– Mira: Torre de celular num morro.

– Instrumento de Medição: Teodolito Wild T2 nº 1.

– Cronômetro, a fim de executarem-se medições subseqüentes num mesmo intervalo de tempo.

– Lanterna.

Leituras Iniciais, com as quais torna-se possível calcular o erro do instrumento de medição (teodolito) na sua leitura vertical, medindo-as nas posições direta e inversa com o teodolito; Tais medições foram obtidas mirando para o alvo (torre de celular), da qual pretende-se descobrir o azimute.

1ª Leitura	Ângulo Horizontal	Ângulo Vertical
Direta	115°17'22"	88°40'14,5"
Inversa	#	271°13'15"

2ª Leitura	Ângulo Horizontal	Ângulo Vertical
Direta	115°17'16"	#
Inversa	#	#

Hora legal, ângulos horizontal e vertical coletados durante um intervalo de tempo de 30min prévios e posteriores da estrela *Alfa Carina* elongar, tendo ocorrido tal elongação aproximadamente às 21h10min do dia em que foi feito o trabalho (19/04/01).

Medições	Hora Legal	Ângulo Horizontal	Ângulo Vertical
1	20h12min37s	175°51'53"	42°11'23"
2	20h21min10s	176°17'53,5"	43°36'20,5"
3	20h26min30s	176°29'40"	44°24'21,5"
4	20h32min50s	176°41'57,5"	45°21'27,5"
5	20h40min10s	176°53'47"	46°26'46"
6	20h52min12s	177°07'25"	48°16'41"
7	20h59min52s	177°11'46"	49°26'51"
8	21h03min19s	177°13'00"	49°58'10"
9	21h09min55s	177°14'11"	50°58'08"
10	21h15min03s	177°13'18"	51°45'00"
11	21h19min44s	177°11'35"	52°28'03"
12	21h26min51s	177°07'09"	53°03'55"
13	21h31min40s	177°05'05"	54°06'52"
14	21h36min07s	177°00'23"	54°56'15"
15	21h43min11s	177°52'27"	56°01'05"
16	21h47min16s	176°47'19"	56°37'39"
17	21h50min36s	176°43'05,5"	57°07'42"

Com o auxílio de um programa, cuja missão foi criar uma parábola ajustada a partir dos dados anteriores, extraídos da observação da estrela, foi possível obter os parâmetros da função da parábola em questão, podendo assim elaborar-se a equação da mesma, tornando-se viável e precisa

a obtenção do ângulo horizontal do astro e a hora legal no exato instante em que este sofre elongação.

Parábola:

$$L_h = aH^2 + bH + c \quad (1)$$

Onde:

L_h = Leitura do ângulo horizontal da estrela

H = Instante de Hora Legal

Parâmetros:

$$a = -1,3507553$$

$$b = 57,2642316$$

$$c = -429,674779$$

Derivando-se a equação (1) com relação a L :

$$\frac{\partial L_h}{\partial H} = 2aH + b \quad (2)$$

Igualando-se a equação (2) a zero, a fim de obter-se máximo e/ou mínimo da leitura horizontal:

$$\frac{\partial L_h}{\partial H} = 2aH + b = 0$$

$$\frac{\partial L_h}{\partial H} = 2(-1,3507553)H + 57,2642316 = 0$$

$$H = \frac{-57,2642316}{2(-1,3507553)} = 21,1971152732h$$

$H = 21h11min50s$ (Instante de hora legal em que a estrela sofreu elongação)

Substituindo o valor de H encontrado na equação (1):

$$L_h = aH^2 + bH + c$$

$$L_h = (-1,3507553)(21,1971152732^h)^2 + (57,2642316)(21,1971152732^h) + (-429,674779)$$

$$L_h = 177,243480133^\circ$$

$L_h = 177^\circ 14' 37''$ (Leitura horizontal no exato instante que a estrela sofreu elongação)

Cálculo do Azimute da mira:

Através da parábola criada com os dados extraídos da observação de *Alfa Carina*, extraiu-se ($L_h = 177^\circ 14' 37''$) que corresponde ao valor do ângulo horizontal ("zerado" em um ponto qualquer) da estrela no exato instante de sua elongação.

O próximo passo é calcular o Azimute do astro, o qual calcula-se com a seguinte fórmula:

$$\text{sen}(Az^*) = \frac{\cos(\delta)}{\cos(f_{obs})}$$

$$Az^* = \text{sen}^{-1} \left[\frac{\cos(\delta)}{\cos(f_{obs})} \right]$$

$$Az^* = \text{sen}^{-1} \left[\frac{\cos(-52^{\circ}42'07'')}{\cos(-30^{\circ}04'19'')} \right] = 44,4440262623^{\circ} + 180^{\circ}$$

$Az^* = 224^{\circ}26'38''$ (Azimute de *Canopus* no momento de sua elongação à oeste do meridiano do observador);

$$L_{hmira} = \frac{L_{h1^a Leitura} + L_{h2^a Leitura}}{2} = \frac{115^{\circ}17'22'' + 115^{\circ}17'16''}{2}$$

$$L_{hmira} = 115^{\circ}17'19'' \text{ (Leitura horizontal da mira)}$$

Sabendo-se a leitura horizontal da mira, sendo esta a média entre as 2 leituras horizontais iniciais do alvo, é possível encontrar o azimute do alvo através da fórmula matemática:

$$AZ_{MIRA} - AZ_{CANOPUS} = L_{hMIRA} - L_{hCANOPUS}$$

$$AZ_{MIRA} - AZ_{CANOPUS} = L_{hMIRA} - L_{hCANOPUS}$$

$$AZ_{MIRA} = AZ_{CANOPUS} + L_{hMIRA} - L_{hCANOPUS}$$

$$AZ_{MIRA} = 224^{\circ}26'38'' + 115^{\circ}17'19'' - 177^{\circ}14'37''$$

$$AZ_{MIRA} = 162^{\circ}29'20'' \text{ (Azimute da mira)}$$

Conclusão:

O método adotado para descobrirmos o valor do azimute de um alvo fixo qualquer escolhido é simples, viável e eficiente, visto que se necessita saber apenas a declinação do astro, a hora em que este passará por elongação e a latitude do observador. Na hora da observação, basta apenas observar a estrela durante mais ou menos 30 minutos prévios e posteriores de sua elongação, anotar em intervalos subsequentes de aproximadamente 5 minutos os ângulos horizontais e a hora legal da estrela durante sua trajetória, além de obter diretamente com o teodolito o ângulo horizontal do alvo.

3ª Prática

Determinação de latitude usando o método de Sterneck

Sabemos que ao passar pelo plano meridiano de um observador, uma estrela culmina, ou seja, atinge um valor extremo de altura. Na culminação superior a estrela cruza o semicírculo meridiano superior do local (semicírculo superior é o que contém o zênite). Neste instante sua altura é máxima, sendo esta uma situação favorável à sua observação.

Outra particularidade interessante da passagem meridiana é que temos nesta situação relações bem simples envolvendo a distância zenital da estrela (que será mínima), sua declinação e a latitude astronômica do local. Consideremos, por exemplo, a figura II.3, na qual mostramos o plano meridiano de um observador a uma latitude $\phi < 0^{\circ}$. O pólo elevado para este observador é,

portanto, o pólo celeste sul (PSC). Sua altura com relação ao horizonte é em módulo igual à latitude do observador. O pólo celeste é obviamente perpendicular ao equador celeste, que cruza o plano meridiano no ponto EC. A declinação δ da estrela é indicada na figura, assim como sua distância zenital. É fácil provar que:

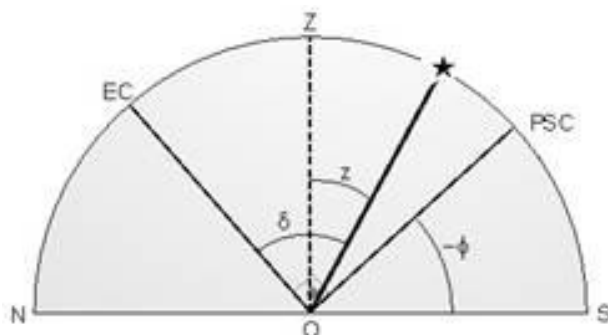


Figura II.3 – Diagrama do plano meridiano, mostrando uma culminação a sul do zênite de um observador de latitude $\phi < 0^\circ$.

$$\delta = \phi - z$$

Seja agora a situação indicada na figura II.4. Agora a estrela culmina a norte do zênite. Neste caso, podemos escrever:

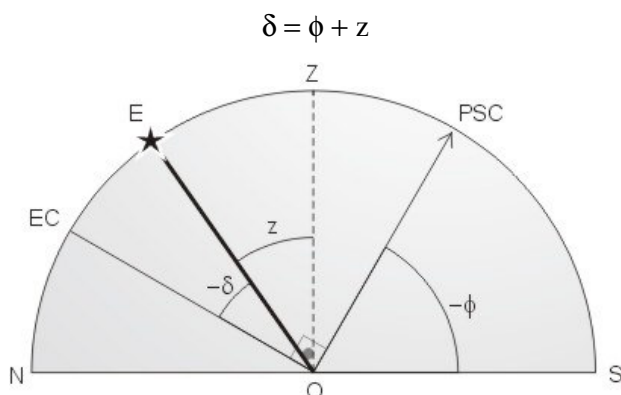


Figura II.4 – Diagrama do plano meridiano de um observador de latitude $\phi < 0^\circ$, com uma estrela culminando a norte do zênite.

Em ambos os casos, se medirmos z e conhecermos a declinação δ , podemos determinar nossa latitude. Note, contudo, que a determinação da distância zenital a partir de uma medida de leitura vertical (L_V) obtida com um teodolito exige duas correções: a correção para o erro zenital do teodolito (z_0) e a correção para refração (R).

$$z_{\text{corr}} = L_V - z_0 + R$$

onde z_0 é obtido fazendo-se leituras verticais de uma mira fixa com o teodolito em posição direta e invertida, enquanto que a correção para refração depende do valor de z e das condições atmosféricas (tabelas com correções para refração podem ser obtidas no Anuário do ON).

Mas podemos combinar as duas equações acima usando duas estrelas: uma culminando a sul do zênite, a uma distância zenital z_s e de declinação $\delta_s = \phi - z_s$; a outra culminando a norte do zênite a uma distância zenital z_n e de declinação $\delta_n = \phi + z_n$.

Somando as duas equações teremos então:

$$2\phi = \delta_s + \delta_n + z_s - z_n \rightarrow \phi = \frac{\delta_s + \delta_n}{2} + \frac{z_s - z_n}{2}$$

Este método de usar duas estrelas que culminam em lados opostos do zênite é conhecido como Método de Sterneck ou Método de Horrebow simplificado, pois se baseia no método mais preciso de determinação de latitude originalmente desenvolvido pelo geodesta Horrebow em 1732 e aperfeiçoado pelo capitão de esquadrão norte-americano Talcott em 1834. A vantagem do método está no fato de que os erros zenitais (instrumentais) nas medidas de z_s e z_n são automaticamente cancelados ao tomarmos a diferença acima. Se escolhermos estrelas que culminem a distâncias zenitais aproximadamente iguais, a diferença $z_s - z_n$ também removerá praticamente todo o efeito devido à refração atmosférica. Portanto, com este método não há necessidade de determinarmos o erro zenital do teodolito e o efeito da refração é minimizado.

Procedimento Observacional

Antes da noite de observação, já temos que ter definido(s) o par(es) de Sterneck a serem usados. Além de culminarem em lados opostos do zênite, as estrelas do par devem idealmente satisfazer às seguintes condições:

- 1) Suas distâncias zenitais na culminação devem ser relativamente pequenas ($z_s \leq 45^\circ$ e $z_n \leq 45^\circ$) de modo a minimizar correções para refração;
- 2) A diferença de distância zenital mínima deve ser da ordem de uns 5° ou menos ($|z_s - z_n| \leq 5^\circ$), para garantir que as correções para refração se cancelem ao máximo;
- 3) O intervalo entre as duas culminações não deve exceder uns 30min (ou seja, $|\alpha_s - \alpha_n| \leq 30\text{min}$), de forma a que a atmosfera não mude muito entre uma observação e outra, novamente como forma de evitar termos de refração que não se cancelem;
- 4) Na noite de observação, após a montagem e nivelamento do teodolito, efetuam-se as leituras verticais (L_v) e horizontais (L_h) das estrelas do par de Sterneck, em intervalo de tempo que compreenda o instante da passagem meridiana. As tabelas abaixo são um exemplo dos dados coletados.

Exemplo

Tabelas contendo a hora legal e os valores de leitura horizontal e vertical do teodolito para duas estrelas, uma culminando a norte do zênite e a outra ao sul (trabalho do aluno de Engenharia Cartográfica da UFRGS, Rafael Santos Genro).

Ângulos horizontal e vertical coletados durante um intervalo de tempo de 30min prévios e posteriores à culminação da estrela *Beta Leonis* a norte do zênite:

Medições	Hora Legal	Ângulo Horizontal	Ângulo Vertical
1	19h 23min 58s	126° 25' 39"	45° 47' 19"
2	19h 35min 05s	122° 41' 27"	45° 09' 33"
3	19h 45min 30s	119° 08' 12"	45° 01' 27"
4	19h 57min 42s	114° 56' 46"	44° 51' 36"
5	20h 03min 14s	113° 01' 15"	44° 50' 59"
6	20h 09min 56s	110° 42' 58"	44° 53' 24"
7	20h 14min 38s	109° 05' 38"	44° 57' 01"
8	20h 19min 07s	107° 33' 54"	45° 02' 04"

Ângulos horizontal e vertical coletados durante um intervalo de tempo de 30 minutos prévios e posteriores à culminação da estrela *Beta Crucis* a sul do zênite:

Medições	Hora Legal	Ângulo Horizontal	Ângulo Vertical
1	20h 33min 58s	286° 38' 52"	30° 10' 59"
2	20h 39min 19s	287° 59' 08"	30° 03' 44"
3	20h 45min 10s	289° 27' 24"	29° 57' 22"
4	20h 50min 10s	290° 43' 35"	29° 53' 51"
5	20h 54min 19s	291° 46' 59"	29° 51' 38"
6	20h 58min 35s	292° 52' 13"	29° 50' 38"
7	21h 04min 16s	294° 19' 39"	29° 51' 00"
8	21h 10min 49s	296° 00' 06"	29° 53' 38"
9	21h 17min 09s	297° 36' 32"	29° 58' 33"
10	21h 22min 33s	298° 58' 20"	30° 04' 32"

11	21h 27min 04s	300° 05' 24"	30° 10' 20"
----	---------------	--------------	-------------

Os pontos obtidos podem então ser graficados e ter a eles ajustada uma parábola, de forma semelhante à que foi feita em práticas anteriores. Resulta daí um valor de altura máxima (ou distância zenital mínima), correspondente à culminação, e que pode ser diretamente inserido na equação para a latitude ϕ dada acima. Havendo uma diferença considerável entre os instantes das culminações das estrelas do par, aconselha-se a correção dos valores medidos para refração. A figura II.5 mostra um gráfico de $h_{med} = 90^\circ - L_v \times L_h$ para uma das estrelas de um par usado.

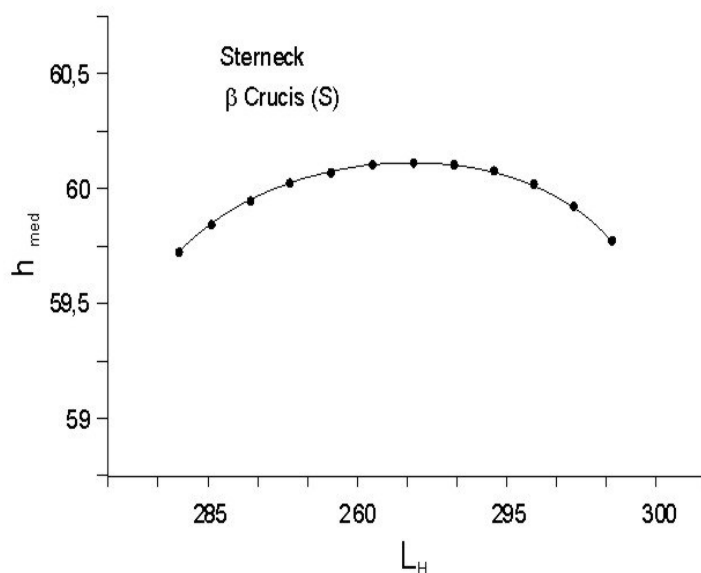


Figura II.5 – Gráfico com medidas de altura aparente, $90^\circ - L_v$, em função de medidas de leitura horizontal. A curva é uma parábola ajustada aos pontos medidos.

Outras referências bibliográficas: Determinações Astronômicas, F. Hatschbach; Geodésica Elementar e Astronomia de Campo, J. Haertel; Notas de Aula de J.M. Arana.

4ª Prática

Determinação de longitude usando Método das Alturas Iguais

Sabemos que as estrelas atingem sua máxima altura no céu ao atravessarem o meridiano astronômico de um observador em seu movimento diurno de leste para oeste. Vimos que é possível, conhecida a declinação δ de uma estrela, determinar a latitude ϕ de um local pela determinação de sua distância zenital na culminação, z_{min} .

Métodos de determinação da longitude λ também existem. Analogamente à latitude, podemos determinar λ apenas pela observação de uma estrela durante a passagem meridiana. Como

fazer isso? Lembrando que a longitude é dada simplesmente pela diferença de hora, sideral ou solar, entre o nosso meridiano e o de Greenwich:

$$\lambda = H_G - H$$

Conhecidas, para um mesmo instante, as horas siderais local e em Greenwich, temos imediatamente a longitude. A hora sideral local em um dado instante é simplesmente a ascensão reta do círculo horário que coincide com o meridiano naquele instante. Assim, no instante em que uma estrela de ascensão reta α culmina para um dado observador sabemos que a hora sideral local é simplesmente:

$$S = \alpha$$

Se pudermos determinar a hora sideral em Greenwich neste mesmo instante, saberemos então a longitude do local. A hora sideral em Greenwich pode ser determinada se anotarmos a hora legal em que se deu a culminação da estrela. Seja HL esta hora. Conhecido o fuso horário F do local, sabemos que a hora solar média em Greenwich (ou seja, o tempo universal) será:

$$M_G = HL - F$$

A hora sideral em Greenwich segue facilmente pela fórmula:

$$S_G = S_0 + M_G(1 + \eta) = S_0 + (HL - F)(1 + \eta)$$

onde S_0 é a hora sideral em Greenwich à 0h TU do dia da observação, que pode ser tirada das Efemérides e $\eta = 0,00273790926$.

Um problema do método descrito acima é o de que necessitamos conhecer com bastante precisão o meridiano local, de forma a poder observar a estrela e anotar a hora legal no instante de sua culminação. Uma maneira de contornar este problema é usar o fato de que o movimento diurno de uma estrela é simétrico com relação à passagem meridiana. Ou seja, o intervalo de tempo entre o nascer e a passagem meridiana é igual ao intervalo decorrido entre esta última e o ocaso. O mesmo se aplica às passagens da estrela por um outro almucântar diferente de $h = 0^\circ$. Podemos então escolher um determinado almucântar e observar a estrela cruzá-lo tanto a leste quanto a oeste do meridiano. Sabemos, pela simetria do movimento diurno, que a hora legal da culminação desta estrela será igual à média das horas legais correspondentes a estes dois instantes:

$$HL = \frac{HL_L + HL_O}{2}$$

onde, na expressão acima, HL_L e HL_O são, respectivamente, as horas legais em que a estrela atravessa o círculo de altura constante a leste e a oeste do meridiano. De resto, a determinação de λ é igual à descrita anteriormente.

Por envolver observações de uma mesma estrela ao cruzar por duas vezes um mesmo almucântar, este método de determinação da longitude é chamado de Método das Alturas Iguais. A figura II.6 procura mostrar a essência do método, que consiste em anotar os valores de hora legal

nos instantes em que a estrela atravessa os pontos P_1 e P_2 , respectivamente a oeste e a leste do meridiano astronômico.

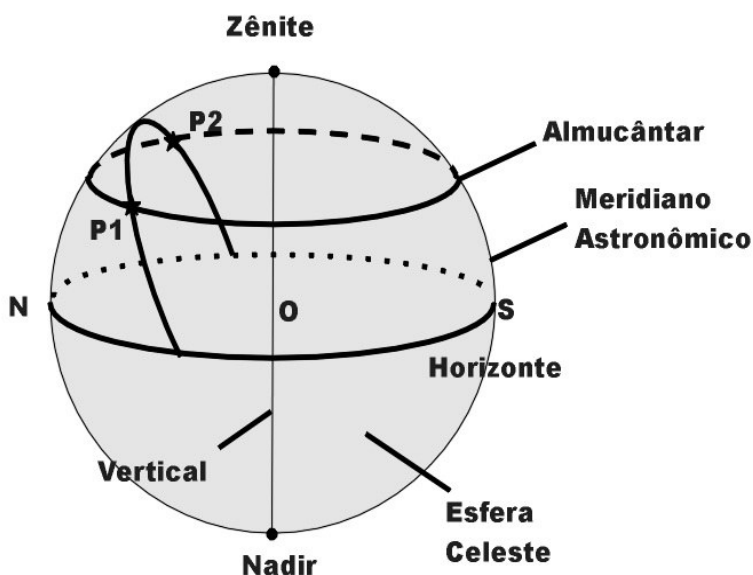


Figura II.6 – Arco diurno descrito por uma estrela, cuja intersecção com o almucântar mostrado se dá nos pontos P_1 e P_2 .

Procedimento Observacional

1 – Como de hábito, devemos escolher uma estrela que saibamos que vai estar próxima do meridiano no intervalo de hora legal disponível para as observações. Isso implica uma estimativa inicial e aproximada da longitude e a leitura de S_0 das Efemérides. A primeira nos permite converter o intervalo de hora legal disponível para intervalo de hora solar média local. A segunda nos permite converter o intervalo de hora solar média local para intervalo de hora sideral. A estrela escolhida deve ter ascensão reta contida dentro deste último intervalo.

2 – Sabemos que a estrela culminará no instante em que a hora sideral local for igual à sua ascensão reta. Conhecida sua declinação, podemos determinar a altura da estrela na culminação, $h_{\max}$. Temos necessariamente que escolher um almucântar abaixo deste valor. Para não termos que esperar muito tempo entre a travessia do almucântar a leste e a travessia posterior a oeste do meridiano, convém escolher o almucântar de $h = h_{\max} - 1^\circ$ ou algo assim. Quanto mais baixo o valor de h , maior o intervalo de tempo decorrido entre os dois instantes em que a estrela assume aquele valor de altura. Note que um intervalo grande de tempo pode implicar variações nas condições atmosféricas e, por conseguinte, erros na determinação da longitude causados por efeitos variáveis de refração atmosférica.

3 – Na noite de observação, como já sabido, deve-se proceder ao nivelamento e calibração do teodolito, bem como à estimativa aproximada do meridiano, materializado pelo valor de azimuth

de alguma mira fixa, suposto determinado anteriormente. Fixa-se o teodolito no nível vertical desejado e mira-se aproximadamente na direção à estrela, até que ela entre no campo do teodolito e cruze o retículo horizontal. Anota-se então o valor de HL_L . Mantendo sempre travada a vertical do teodolito, procura-se acompanhar a estrela em azimuth. Eventualmente ela voltará a aparecer no campo do teodolito, desta vez em movimento descendente. Anota-se então o valor de HL_O no instante em que a estrela cruza novamente o retículo horizontal.

Alternativamente à estratégia acima, pode-se simplesmente monitorar os valores de leitura vertical da estrela, anotando-os em uma tabela juntamente com os valores de hora legal em que foram feitas estas leituras. De posse destes dados, pode-se, como já foi feito em determinações anteriores, ajustar-se uma parábola aos pontos e determinar a partir do ajuste, os valores de hora legal que correspondem a um determinado valor de leitura vertical. A figura II.7 mostra os pontos obtidos em experimento similar.

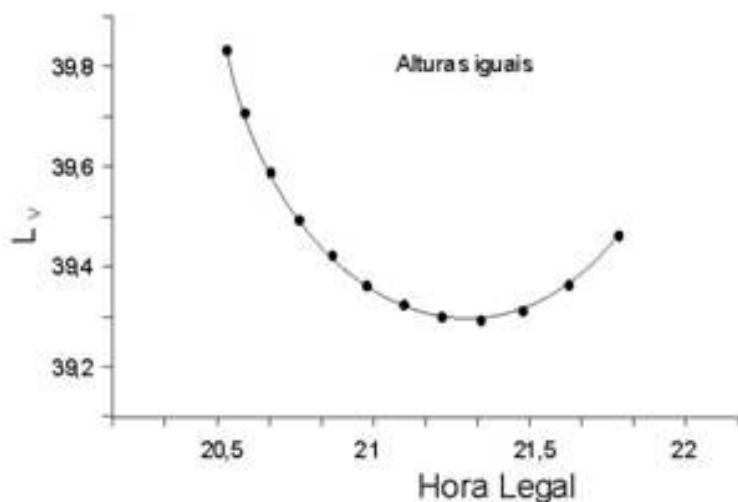


Figura II.7 – Gráfico de leitura vertical (L_v) de uma estrela em torno da passagem meridiana em função da hora legal. A curva é a parábola que melhor se ajusta aos pontos.

Pela figura, vemos que um valor de almucântar que poderia ser usado na determinação da longitude seria o correspondente a $L_v = 39,4^\circ$, por exemplo.

4 – A média dos dois valores de HL (ou o valor correspondente ao mínimo da parábola) nos dá a hora legal da passagem meridiana, que por seu turno nos permite conhecer a hora sideral em Greenwich correspondente a este instante. Finalmente, teremos então $\lambda = S - S_G = \alpha - S_G$.

Outras referências bibliográficas: Determinações Astronômicas, F. Hatschbach; Geodésica Elementar e Astronomia de Campo, J. Haertel; Notas de Aula de J.M. Arana.

5ª Prática

Determinação de longitude usando Método das Distâncias Zenitais Absolutas

Vimos que podemos determinar a longitude de um meridiano se conhecermos a hora sideral tanto local quanto em Greenwich de um determinado instante. Estudamos o método das alturas iguais, que usa como instante aquele da passagem de uma dada estrela pelo meridiano cuja longitude desejamos conhecer. Mas podemos na verdade usar qualquer outro instante, desde que possamos medir com precisão a distância zenital de uma estrela neste instante. Seja z o valor obtido, por um observador de latitude ϕ , para uma dada estrela de declinação δ conhecida e em um dado instante de hora legal HL.

Usando uma das fórmulas dos 4 elementos temos:

$$\begin{aligned}\cos z &= \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H \rightarrow \\ \rightarrow \cos H &= \frac{\cos z - \sin \phi \sin \delta}{\cos \phi \cos \delta}\end{aligned}$$

Conhecido o valor de H , o ângulo horário da estrela no instante considerado, temos a hora sideral local:

$$S = H + \alpha$$

Note que supomos que as coordenadas equatoriais da estrela cuja altura medimos são conhecidas. O mesmo se aplica à latitude do local.

Pela hora legal HL, de maneira inteiramente análoga à apresentada no método das alturas iguais, podemos inferir a hora sideral em Greenwich correspondente ao mesmo instante, S_G . A longitude então será:

$$\lambda = S - S_G$$

Este método, portanto, pode ser usado com qualquer estrela cujas coordenadas equatoriais sejam previamente conhecidas para o dia da observação (usando-se o *Apparent Places of Stars*, por exemplo). O instante de observação também pode ser qualquer um, com o óbvio vínculo que a estrela esteja visível no céu do observador. A desvantagem deste método, por outro lado, reside no fato de que temos que determinar a distância zenital z absoluta, ou seja, corrigida para efeitos instrumentais e para refração.

Procedimento Observacional

1 – A escolha da estrela é simples: basta que ela seja uma estrela de ascensão reta e declinação conhecidas e que esteja a uma distância zenital não muito grande (para evitar correções grandes para refração) no instante desejado para a observação.

2 – Na noite de observação, como já sabido, deve-se proceder ao nivelamento e calibração do teodolito. Necessita-se também estimar o erro zenital do mesmo. Como já discutido, isso é feito anotando-se as leituras verticais de uma mira fixa com o teodolito nas posições direta e inversa. Isso feito, mira-se à estrela e, em um dado instante, anota-se tanto sua leitura vertical quanto a hora legal

em que esta foi feita. Aplica-se à leitura vertical as correções para o erro zenital e para refração. Esta última depende da temperatura e pressão, que devem ser lidas com um barômetro. Uma vez conhecido o valor de z , determina-se, pelas fórmulas dadas acima, o valor de H e de S . Com a hora legal e o fuso em que se encontra o meridiano, determina-se então o valor de S_G e, por conseguinte, a longitude deste meridiano.

3 – Note que se são anotados N valores de z e seus correspondentes instantes de hora legal, temos N estimativas distintas de longitude λ . Podemos então tomar o valor médio como nossa melhor estimativa, sendo a dispersão em torno deste valor uma medida da incerteza de medida.

Outras referências bibliográficas: Determinações Astronômicas, F. Hatschbach; Geodésica Elementar e Astronomia de Campo, J. Haertel; Notas de Aula de J.M. Arana.

Exemplo

Relatório de prática de determinação de longitude usando o Método das Distâncias Zenitais

Absolutas

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Geociências

Disciplina: Astronomia Geodésica II

Código: FIS 02006

5ª Prática

Rafael Santos Genro Matrícula: 2795/97-7 Turma U

Professor Basílio Santiago

Período 01/01

O presente trabalho visa determinar a longitude em que o observador se encontra com o auxílio de uma estrela.

O trabalho foi realizado no terraço do prédio da Física, o qual foi devidamente projetado para instalarem-se instrumentos de medição de coordenadas horizontais e verticais (teodolitos).

Feita a instalação do teodolito, com auxílio dos seus calantes, nivelou-se o mesmo.

Coletaram-se ângulos horizontais e verticais do astro, assim como a hora legal de cada observação durante a trajetória do astro.

Tendo diversos valores de ângulos verticais da estrela e a hora legal, referente à tais instantes da observação mencionada, torna-se possível encontrar a desejada longitude do observador, através da diferença entre Hora Sideral para o observador e Hora Sideral em Greenwich. Tal método denomina-se “Método das Distâncias Zenitais Absolutas” devido ao fato de que para cada valor de leitura vertical ocorrida num determinado instante de Hora Legal, calcularemos o instante de Hora Sideral com relação ao observador e o instante de Hora Sideral

com relação à Greenwich no exato momento da cada leitura; Sabendo-se que a diferença entre estas 2 últimas proporciona o valor da longitude do observador, teremos assim diversas longitudes, cada uma referente a sua respectiva medição. A Longitude do observador será a média destas diversas longitudes. Posteriormente serão dados todos os passos para encontrarem-se tais incógnitas.

Quanto à escolha do astro para tal observação, sabendo-se a longitude aproximada do local da observação e o intervalo de hora legal disponível para a mesma, obtém-se o intervalo de hora sideral correspondente. Isso envolve uma transformação de hora legal para hora solar local e uma conversão de hora solar local em hora sideral. Descobrimos o intervalo em hora sideral, procuram-se estrelas que sofram elongação dentro deste intervalo. Logo, com o auxílio de uma lista contendo as coordenadas equatoriais de várias estrelas (*Apparent Places of Stars*), tudo que se precisa fazer é determinar quais estrelas têm ascensão reta contida no intervalo de hora sideral encontrado.

– Astro: *Canopus* da constelação de *Carina*.

$$\delta = -52^{\circ}42'07''$$

$$\alpha = 6\text{h } 23\text{min } 55\text{s}$$

– Mira: Torre de celular num morro.

– Instrumento de Medição: Teodolito Wild T2 nº 1.

– Cronômetro, a fim de executarem-se medições subseqüentes num mesmo intervalo de tempo.

– Lanterna.

Leituras Iniciais, com as quais torna-se possível calcular o erro do instrumento de medição (teodolito) na sua leitura vertical, medindo-as nas posições direta e inversa com o teodolito; Tais medições foram obtidas mirando para o alvo (torre de celular).

1ª Leitura	Ângulo Horizontal	Ângulo Vertical
Direta	115°17'22"	88°40'14,5"
Inversa	#	271°13'15"
2ª Leitura	Ângulo Horizontal	Ângulo Vertical
Direta	115°17'16"	#
Inversa	#	#

Hora legal, ângulos horizontal e vertical da estrela *Alfa Carina* coletados no dia em que foi feito o trabalho (19/04/01).

Medições	Hora Legal	Ângulo Horizontal	Ângulo Vertical
1	20h12min37s	175°51'53"	42°11'23"
2	20h21min10s	176°17'53,5"	43°36'20,5"
3	20h26min30s	176°29'40"	44°24'21,5"
4	20h32min50s	176°41'57,5"	45°21'27,5"
5	20h40min10s	176°53'47"	46°26'46"
6	20h52min12s	177°07'25"	48°16'41"
7	20h59min52s	177°11'46"	49°26'51"
8	21h03min19s	177°13'00"	49°58'10"
9	21h09min55s	177°14'11"	50°58'08"
10	21h15min03s	177°13'18"	51°45'00"
11	21h19min44s	177°11'35"	52°28'03"
12	21h26min51s	177°07'09"	53°03'55"
13	21h31min40s	177°05'05"	54°06'52"
14	21h36min07s	177°00'23"	54°56'15"
15	21h43min11s	177°52'27"	56°01'05"
16	21h47min16s	176°47'19"	56°37'39"
17	21h50min36s	176°43'05,5"	57°07'42"

Cálculo do Erro do Teodolito com relação as suas leituras verticais:

$$Z_0 = \frac{(Lvd + Lvi) - 360^\circ}{2}$$

$$Z_0 = \frac{(88^\circ 40' 14,5'' + 271^\circ 13' 15'') - 360^\circ}{2} = -0^\circ 03' 15''$$

1ª medição:

$$HL = 20h12min37s$$

$$Lv = 42^\circ 11' 23''$$

onde HL significa a hora legal no exato instante em que o astro possuía a leitura vertical LV medida com o teodolito;

Correção da primeira leitura vertical com relação ao erro do teodolito:

$$Z_{\text{obs}} = Z_1 - Z_0$$

$$Z_{\text{obs}} = 42^\circ 11' 23'' - (-0^\circ 03' 15'')$$

$$Z_{\text{obs1}} = 42^\circ 14' 38''$$

Correção da primeira leitura vertical com relação à refração:

$$R_m = 51''$$

$$R_m = 0,0141666666667^\circ$$

(Valor tirado do Almanaque Astronômico com o auxílio de uma interpolação matemática).

$$Z_{\text{cor}} = Z_{\text{obs1}} + R_m$$

$$Z_{\text{cor}} = 42^\circ 14' 38'' + 51''$$

$$Z_{\text{cor1}} = 42^\circ 15' 29''$$

Tendo a distância zenital do astro corrigida com relação ao erro do instrumento de medição e à refração, com o auxílio da seguinte fórmula matemática provinda da trigonometria esférica aplicada à astronomia de posição, encontramos o ângulo horário H da estrela no exato instante da captação de tal ângulo vertical L_v , através do qual torna-se viável encontrar a hora sideral S para o observador neste instante:

$$\cos(Z) = \sin(\phi)\sin(\delta) + \cos(\phi)\cos(\delta)\cos(H)$$

$$\cos(H_n) = \frac{\cos(Z_n) - \sin(\phi)\sin(\delta)}{\cos(\phi)\cos(\delta)}$$

Dados:

n = número de medições $1 < n < 17$

H_n = Ângulo Horário da estrela na n ésima medição variável

Z_n = Ângulo Zenital da estrela na n ésima medição variável

S_n = Hora Sideral para o observador no instante da n ésima medição variável

$\phi = -30^\circ 04' 58''$ (Latitude do Observador) constante

$\delta = -52^\circ 42' 07''$ (Declinação da Estrela) constante

$\alpha = 6^h 23^m 55^s$ (Ascensão Reta da Estrela) constante

$$\cos(H_n) = \frac{\cos(42^\circ 15' 29'') - \sin(-30^\circ 04' 58'')\sin(-52^\circ 42' 07'')}{\cos(-30^\circ 04' 58'')\cos(-52^\circ 42' 07'')} = 0,65106996079$$

$$H = \arccos(0,651069669079)$$

$H_1 = 49^\circ 22' 40''$ (Ângulo Horário da estrela no instante da 1ª medição)

$$S_n = H_n + \alpha$$

$$S_1 = H_1 + \alpha$$

$$S_1 = 49^\circ 22' 40'' + 6^h 23^m 55^s$$

$$S_1 = 3^h 17^m 31^s + 6^h 23^m 55^s$$

$S_1 = 9^h 41^m 26^s$ (Hora Sideral para o observador no instante da 1ª medição)

Sabendo-se a Hora Sideral para o observador no instante da observação da estrela, e descobrindo-se a Hora Sideral em Greenwich neste mesmo instante, subtraindo-se tais Horas Siderais encontra-se finalmente a desejada Longitude do observador. Para encontrarmos a Hora Sideral em Greenwich no instante da observação, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$S_{Gn} = S_0 + (HL_n - F)(1 + \eta)$$

Dados:

n = número de medições $1 < n < 17$

S_{Gn} = Hora Sideral em Greenwich na n ésima medição variável

HL_n = Hora Legal para o observador na n ésima medição variável

S_0 = 13h 48min 38s (hora sideral às 0h em Greenwich no dia da observação retirada do

Astronomical Almanac) constante

F = - 3h (fuso horário de Porto Alegre) constante

η = 0,00273790926 constante

$$S_G = S_0 + (HL - F) (1 + \eta)$$

$$S_{G1} = S_0 + (HL_1 - F) (1 + \eta)$$

$$S_{G1} = 13h 48min 38s + (20h 12min 37s + 3h) (1 + 0,00273790926)$$

$$S_{G1} = 37h 05min 04s$$

$$S_{G1} = 13h 05min 04s$$

$$\lambda = S_G - S$$

$$\lambda = S_G - S$$

$$\lambda_1 = S_{G1} - S_1$$

$$\lambda_1 = 13h 05min 04s - 9h 41min 26s$$

$$\lambda_1 = 3h 23min 38s \text{ (Longitude 1 do observador oeste de Greenwich)}$$

É importante ressaltar que este valor da longitude do observador encontrado através da 1ª medição ainda não é o valor a ser adotado; É necessário calcular um valor de longitude para cada medição feita durante a observação do astro utilizando os mesmos meios com os quais descobrimos este 1º valor; Logo, com os 17 diferentes valores de longitude extrair-se-á uma média, a qual corresponderá ao valor definitivo da longitude do observador.

Valores da Longitude calculados através das 17 medições:

$\lambda_1 = 3h 23min 38s$; $\lambda_2 = 3h 22min 40s$; $\lambda_3 = 3h 22min 40s$; $\lambda_4 = 3h 22min 39s$; $\lambda_5 = 3h 22min 46s$; $\lambda_6 = 3h 22min 42s$; $\lambda_7 = 3h 22min 39s$; $\lambda_8 = 3h 22min 40s$; $\lambda_9 = 3h 22min 41s$; $\lambda_{10} = 3h 22min 40s$; $\lambda_{11} = 3h 22min 37s$; $\lambda_{12} = 3h 25min 48s$; $\lambda_{13} = 3h 23min 42s$; $\lambda_{14} = 3h 22min 42s$; $\lambda_{15} = 3h 22min 36s$; $\lambda_{16} = 3h 22min 38s$; $\lambda_{17} = 3h 22min 39s$.

$$\lambda_{obs} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{17}}{17}$$

$$\lambda_{obs} = 3h 22min 58s \text{ (Longitude do observador à oeste de Greenwich)}$$

$$\lambda_{obs} = 50^\circ 44' 31'' \text{ (Longitude do observador à oeste de Greenwich)}$$

Conclusão:

O método adotado para descobrirmos o valor da longitude do observador é simples, viável e eficiente, visto que se necessita saber apenas a declinação e ascensão reta do astro, a latitude do observador e a Hora Sideral à 0h em Greenwich na data da observação. Na hora da observação, basta apenas observar o movimento diurno da estrela, anotar em intervalos subsequentes de aproximadamente 5min os ângulos verticais e a hora legal da estrela durante sua trajetória.

6ª Prática

Determinação da hora pelo Método de Zinger

O Método de Zinger se baseia na observação de um par de estrelas ao cruzarem um determinado almucântar aproximadamente ao mesmo tempo, uma a leste e a outra a oeste do meridiano. Este método, contrariamente ao método das alturas iguais, não exige que se faça leituras de ângulos com o teodolito, sejam verticais, sejam horizontais. Isso elimina as fontes de erro inerentes a métodos anteriores. Por outro lado, para aplicarmos o Método de Zinger, precisamos conhecer nossa latitude e faz-se necessário usar um cronômetro sideral. Precisamos também programar previamente um par de estrelas de coordenadas conhecidas e que saibamos que irão atravessar um determinado almucântar aproximadamente ao mesmo tempo. Este par é chamado *par de Zinger*.

Sejam α_E e δ_E , α_W e δ_W , as coordenadas equatoriais das estrelas do par, situadas, respectivamente, a leste e oeste do meridiano. Sejam H_E e H_W os ângulos horários dessas estrelas ao atravessarem o almucântar escolhido. Vamos inicialmente definir algumas variáveis que aparecem de forma recorrente nas expressões associadas ao método.

$$\alpha = \frac{\alpha_E - \alpha_W}{2}; a = \frac{\alpha_E + \alpha_W}{2}; \beta = \frac{\delta_E - \delta_W}{2}; b = \frac{\delta_E + \delta_W}{2}; \gamma = \frac{H_E - H_W}{2}; c = \frac{H_E + H_W}{2}$$

Com um cronômetro sideral, podemos sempre anotar o instante cronométrico (I) de qualquer evento. Conhecido o estado do cronômetro (E), temos então a hora sideral daquele instante. Geralmente, o estado E é determinado pela leitura de um instante cronométrico associado a um evento de hora sideral conhecida, como a culminação de uma estrela de coordenadas conhecidas. Pelo Método de Zinger, vamos determinar a hora sideral e o estado do cronômetro simultaneamente.

Seja a hora sideral em que a estrela a leste atravessa o paralelo horizontal escolhido:

$$S_E = H_E + \alpha_E = I_E + E \quad \text{Eq. (I)}$$

onde a segunda igualdade acima segue das definições de instante cronométrico e de estado de um cronômetro. Analogamente, para a outra estrela do par teremos:

$$S_W = H_W + \alpha_W = I_W + E \quad \text{Eq. (II)}$$

Somando as duas equações acima e dividindo o resultado por 2, temos:

$$\begin{aligned} \frac{H_E + H_W}{2} + \frac{\alpha_E + \alpha_W}{2} &= \frac{I_E + I_W}{2} + E \rightarrow \\ \rightarrow c + a &= \frac{I_E + I_W}{2} + E \rightarrow \\ \rightarrow E &= c + a - \frac{I_E + I_W}{2} \end{aligned} \quad \text{Eq. (III)}$$

Note que os instantes cronométricos I_E e I_W são lidos com o cronômetro sideral e o valor de a é conhecido. Precisamos apenas deduzir c para determinar o valor de E .

O valor de c é obtido a partir da seguinte expressão:

$$\text{sen}(M + c) = \tan(\phi) \tan(\beta) \cos(M) \sec^{-1}(\gamma) \quad \text{Eq. (IV)}$$

onde M é definido pela relação:

$$\tan(M) = \tan(b) \tan(\beta) \tan^{-1}(\gamma) \quad \text{Eq. (V)}$$

Note que b e β dependem apenas das declinações das estrelas do par, que são previamente conhecidas. Para obter o valor de γ , basta subtrair as equações I e II dadas anteriormente. Teremos então:

$$\begin{aligned} \frac{H_E - H_W}{2} + \frac{\alpha_E - \alpha_W}{2} &= \frac{I_E - I_W}{2} \\ \gamma &= \frac{I_E - I_W}{2} - \alpha \end{aligned}$$

O valor encontrado para γ é então inserido na expressão (V) para determinarmos M . Com este último obtemos então o valor de c , pela solução da equação (IV). O estado do cronômetro (E) segue então pela expressão III. Note que, uma vez conhecido o valor de E , podemos então transformar qualquer leitura de instante cronométrico em hora sideral, com óbvias aplicações para fins de determinação da longitude ou da latitude do observador.

No apêndice abaixo, encontra-se a dedução das expressões (IV) e (V) dadas acima. Com elas podemos então obter o valor de c e inseri-lo na Eq. (III) para deduzir o estado do cronômetro E .

Outras referências bibliográficas: Determinações Astronômicas, F. Hatschbach; Geodésica Elementar e Astronomia de Campo, J. Haertel; Notas de Aula de J.M. Arana.

CAPÍTULO 6

EXERCÍCIOS COM SOLUÇÕES

Exercícios sobre Passagem Meridiana e Coordenadas Horizontais

1) Seja um observador situado no Hemisfério Sul da Terra e que observe as culminações inferior e superior de uma estrela circumpolar. Ele obtém $h_i = 20^\circ 12' 32,4''$ e $A_i = 180^\circ$, respectivamente, para a altura e azimute da culminação inferior. Para a culminação superior, ele obtém $h_s = 50^\circ 23' 08,2''$ e $A_s = 180^\circ$. Determine a latitude do observador.

Solução

Ambas as culminações se dão a sul do zênite. Logo, basta tirar uma média das alturas máxima e mínima e lembrar que se arbitra um valor negativo para a latitude de observadores situados no Hemisfério Sul.

$$\phi = -\frac{h_i + h_s}{2}$$
$$\phi = -35^\circ 17' 50,3''.$$

2) Qual a latitude de um observador que observa a estrela *Sirius* passar pelo seu meridiano astronômico a uma distância zenital $z_s = 39^\circ 05' 34,4''$ e azimute $A_s = 180^\circ$. Dados: Declinação de *Sirius*: $\delta = -16^\circ 43' 24,6''$.

Solução

Desenhando o diagrama do plano meridiano deste observador, notamos que o equador celestes está inclinado com relação à vertical do observador por um ângulo $z_s + \delta$. Logo temos:

$$\phi = z_s + \delta = 22,3694^\circ = 22^\circ 22' 9,8''$$

3) Seja um observador a uma latitude $\phi = -30^\circ 14' 46''$. Quais das seguintes estrelas serão circumpolares para este observador? Quais serão invisíveis? Dados, A: $\delta_A = 40^\circ$; B: $\delta_B = -80^\circ$; $\delta_C = -50^\circ$; $\delta_D = 75^\circ$.

Solução

Desenhando o diagrama do plano meridiano para um observador com a latitude dada, vemos que a condição de circumpolaridade será:

$$\delta \leq -(90^\circ + \phi) = -59^\circ 45' 14''$$

Somente B satisfaz esta condição. Já a condição de invisibilidade será dada por:

$$\delta \geq 90^\circ + \phi = 59^\circ 45' 14''$$

Portanto, somente D será invisível.

4) Uma estrela cuja declinação é a mesma que a do Sol no Solstício de Dezembro ($\delta = -23^\circ 27'$) faz sua passagem meridiana a uma altura de $h_s = 50^\circ 23' 11,2''$ e $A_s = 0^\circ$ medidos por um observador. Qual a latitude do observador?

Solução

Como a passagem meridiana se dá a norte do zênite, a equação a ser usada é:

$$\phi = h_s + \delta - 90^\circ = -63^\circ 03' 48,8''$$

5) A altura máxima que o Sol atinge ao longo do ano quando visto de um dado ponto sobre a Terra é de 60° . Em que dia do ano isso ocorre e qual o valor da latitude deste ponto (desconsidere o sinal da latitude)?

Solução

O Sol atinge uma altura máxima menor do que 90° . Isso implica que ele nunca atinge o zênite do observador. Neste caso, sabemos que o observador está fora da faixa de paralelos contida pelos trópicos, ou seja, $|\phi| \geq 23^\circ 27'$. Como o valor máximo de altura é 60° , o observador está 30° além do seu trópico, isto é:

$$|\phi| = 53^\circ 27'$$

Obviamente este valor máximo de altura ocorre no solstício de verão deste observador (em torno de 21/06 ou 22/12, dependendo do hemisfério em que ele se situa), ao meio-dia.

6) Se a ascensão reta do Sol é de $\alpha = 50^\circ$ e o ângulo horário do ponto vernal para um observador é de $H_\gamma = 80^\circ$, qual a hora solar local deste observador?

Solução

Pela definição de hora sideral:

$$S = H_\gamma = H_{\odot} + \alpha_{\odot}$$

Logo,

$$H_{\odot} = H_\gamma - \alpha_{\odot} = 30^\circ = 2h$$

A hora solar será então:

$$M = H_{\odot} + 12h = 14h$$

7) Seja um observador que observe as culminações inferior e superior de uma estrela circumpolar. Ele obtém $h_i = 33^\circ 24' 21''$ e $A_i = 180^\circ$, respectivamente, para a altura e azimuth da culminação inferior. Para a culminação superior, ele obtém $h_s = 76^\circ 19' 40''$ e $A_s = 0^\circ$. Em que Hemisfério ele se situa? Determine a latitude do observador.

Solução

Como sempre, a primeira coisa a ser feita é o desenho do diagrama do plano meridiano do observador, contendo a linha meridiana, o zênite, a horizontal e os pontos cardeais norte e sul. Feito isso, devemos indicar a posição da estrela em questão no instante das culminações inferior e superior, usando os valores de altura h e azimuth A dados. Feito isso, veremos imediatamente que o

pólo elevado, cuja direção é necessariamente bissetriz das direções à estrela nas duas culminações, está a sul do zênite, ou seja, tem azimuth $A_p = 180^\circ$. Assim, sabemos de pronto tratar-se de um observador situado no Hemisfério Sul.

Quanto ao cálculo da sua latitude, basta olharmos o diagrama para inferir uma fórmula que relacione h_i , h_s e ϕ :

$$\phi = -90^\circ + \frac{h_s - h_i}{2}$$

Substituindo então os valores, teremos:

$$\phi = -90^\circ + \frac{76^\circ 19' 40'' - 33^\circ 24' 21''}{2} = -68^\circ 32' 20,5''$$

8) Determinar a latitude de um observador que mede um valor $z_s = 67^\circ 31' 17''$ para a distância zenital da estrela *Fomalhaut* (α do Peixe Austral) na passagem desta pelo seu meridiano, sendo que esta passagem meridiana se dá a sul do zênite. Dados: declinação de *Fomalhaut*: $\delta = -29^\circ 37' 20''$.

Solução

Desenha-se o diagrama do plano meridiano ajuda. Nele coloca-se a horizontal do observador, sua vertical, o meridiano astronômico, o zênite e a posição da estrela ao culminar. Note que a declinação da estrela é dada, então podemos colocar no diagrama a posição do plano equatorial, que estará pouco menos de 30° a norte da posição da estrela. Sabemos que a inclinação deste plano com relação à vertical do observador é igual a latitude deste último. Logo, podemos escrever:

$$z_s = \phi - \delta$$

$$\phi = z_s + \delta = 67^\circ 31' 17'' - 29^\circ 37' 20''$$

$$\phi = 37^\circ 53' 57''$$

9) Seja a estrela *Vega* (α da *Lira*), cuja declinação é $\delta = 38^\circ 47' 01''$. Determine para que latitudes esta estrela é:

- a) Invisível (nunca nasce no céu);**
- b) Circumpolar (nunca se põe no céu);**
- c) Um objeto que nasce e se põe no céu todo dia.**

Solução

a) Basta aplicarmos a condição de invisibilidade de uma estrela. Sabemos que há uma condição para observadores situados no Hemisfério Sul, $\delta > 90^\circ + \phi$, e outra para o Hemisfério Norte, $\delta < \phi - 90^\circ$. Naturalmente, como se trata de uma estrela situada no Hemisfério norte celeste, $\delta > 0^\circ$, observadores de latitude norte sempre terão esta estrela acima do horizonte em algum instante do dia.

A condição que temos que aplicar então é a que vale para o hemisfério sul terrestre:

$$\delta > 90^\circ + \phi \rightarrow \phi < \delta - 90^\circ$$

Logo, *Vega* será invisível para latitudes:

$$\phi < 38^\circ 47' 01'' - 90^\circ = -51^\circ 12' 59''$$

b) Analogamente ao que foi feito no item anterior, a solução consiste em aplicarmos condições, no caso de circumpolaridade, já deduzidas anteriormente. Naturalmente, *Vega* só será circumpolar para latitudes a norte do Equador terrestre. A condição de circumpolaridade que temos que usar então é a que se refere a este hemisfério:

$$\delta > 90^\circ - \phi \rightarrow \phi > 90^\circ - \delta$$

Vega será então circumpolar para:

$$\phi > 90^\circ - 38^\circ 47' 01'' = 51^\circ 12' 59''$$

c) Em latitudes intermediárias aos casos anteriores, a estrela *Vega* nascerá e se porá no céu do observador diariamente. O domínio de latitudes em que isto ocorre é então:

$$-51^\circ 12' 59'' < \phi < 51^\circ 12' 59''$$

Exercícios sobre Trigonometria Esférica e Movimento Diurno

1) Qual o excesso esférico de um triângulo esférico tri-retilátero? Qual o valor de sua área se o seu raio é $R = 10\text{m}$?

Solução

Como o triângulo é tri-retilátero, todos os seus lados são ângulos retos:

$$a = b = c = 90^\circ$$

Logo, pelas fórmulas dos 4 elementos, $A = B = C = 90^\circ$.

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ = 90^\circ$$

$$\varepsilon = 270^\circ - 180^\circ = 90^\circ$$

A área A é dada então pela fórmula:

$$A = \frac{\pi R^2 \varepsilon}{180^\circ}$$

$$A = \frac{10^2 \pi}{2} = 157,1 \text{ m}^2$$

2) Seja um triângulo esférico com um lado $a = 92^\circ 04'$, ângulo a ele adjacente $B = 162^\circ 09'$ e outro lado adjacente a este último $c = 51^\circ 36'$. Determine os valores dos demais elementos, b , A e C .

Solução

$$B = 162,16^\circ; a = 92,07^\circ; c = 51,6^\circ$$

Usando a fórmula dos 4 elementos aplicada ao ângulo B, podemos determinar o lado b :

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(B)$$

$$\cos(b) = (-0,0361)(0,6211) + (0,9993)(0,7837)(-0,9519)$$

$$\cos(b) = 0,7679 \rightarrow b = 140,17^\circ$$

Agora, usemos a analogia dos senos para obter o ângulo A:

$$\sin(A) = \frac{\sin(B)\sin(a)}{\sin(b)}$$

$$\sin(A) = \frac{(0,9993)(0,3063)}{0,6405} = 0,4779$$

$$A = 28,55^\circ \text{ ou } A = 141,45^\circ$$

Finalmente, determinamos o ângulo C do triângulo com mais uma fórmula dos 4 elementos:

$$\cos(C) = \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\sin(a)\sin(b)}$$

$$\cos(C) = \frac{0,62211 - (-0,0361)(-0,7679)}{(0,9993)(0,6405)} = 0,9271$$

$$C = 22,01^\circ$$

3) Seja um observador de latitude $\phi = -30^\circ 60'$. Ele, em um dado instante, mede $h = 42^\circ 12'$ e $A = 69^\circ 30'$ para a altura e azimute de uma estrela. Determine:

- a) A declinação da estrela;**
- b) O ângulo horário no instante considerado;**
- c) A altura da estrela em suas culminações superior e inferior;**
- d) Os valores de ângulo horário da estrela ao nascer e ao se por;**
- e) O tempo durante o qual a estrela permanece acima do horizonte deste observador.**

Solução

$$A = 69,5^\circ; \phi = -30,1^\circ; h = 42,2^\circ$$

O observador está no hemisfério Sul ($\phi < 0^\circ$). Logo, se desenharmos o triângulo de posição de um astro visível para este observador, veremos que ele tem lados $90^\circ + \phi$, $90^\circ + \delta$ e $90^\circ - h$; ângulos correspondentes Q, $180^\circ - A$, $360^\circ - H$. Escrevendo a fórmula dos 4 elementos que envolve o azimute A da estrela, teremos:

$$\cos(90^\circ + \delta) = \cos(90^\circ - h)\cos(90^\circ + \phi) + \sin(90^\circ - h)\sin(90^\circ + \phi)\cos(180^\circ - A)$$

$$-\sin(\delta) = \sin(h)[- \sin(\phi)] + \cos(h)\cos(\phi)[- \cos(A)]$$

$$\sin(\delta) = \sin(h)\sin(\phi) + \cos(h)\cos(\phi)\cos(A)$$

Vê-se que esta expressão, deduzida de forma independente para um observador no Hemisfério Sul, é idêntica a obtida para o caso de um observador no Hemisfério Norte. Calculando então a declinação δ da estrela:

$$\begin{aligned}\text{sen}(\delta) &= (-0,5015)(0,6717) + 0,8651(0,7408)(0,3502) = -0,1124 \\ \delta &= -6,4^\circ\end{aligned}$$

A fórmula dos 4 elementos para o ângulo horário H da estrela é:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - h) &= \cos(90^\circ + \delta)\cos(90^\circ + \phi) + \text{sen}(90^\circ + \delta)\text{sen}(90^\circ + \phi)\cos(360^\circ - H) \\ \text{sen}(h) &= -\text{sen}(\delta)(-\text{sen}\phi) + \cos(\delta)\cos(\phi)\cos(H) \\ \text{sen}(h) &= \text{sen}(\delta)(\text{sen}\phi) + \cos(\delta)\cos(\phi)\cos(H)\end{aligned}$$

Vê-se, portanto, que esta fórmula também é idêntica à derivada anterior, com base em um triângulo de posição típico para um observador no Hemisfério Norte. Calculemos então o ângulo horário:

$$\begin{aligned}\cos(H) &= \frac{\text{sen}(h) - \text{sen}(\delta)\text{sen}(\phi)}{\cos(\phi)\cos(\delta)} \\ \cos(H) &= \frac{0,6717 - (-0,5015)(-0,1124)}{(0,8651)(0,9938)} = 0,7157 \\ H &= 44,3^\circ \rightarrow H = 360^\circ - 44,3^\circ = 315,7^\circ\end{aligned}$$

A escolha do valor $H = 315,7^\circ$ ao invés de $H = 44,3^\circ$ se deve ao fato de que o azimute A da estrela é menor do que 180° , o que a coloca a leste do meridiano astronômico do observador.

$$H = 21,0468\text{h} = 21\text{h } 02\text{min } 48\text{s}$$

Para a culminação superior temos $H = 0^\circ$. Logo:

$$\begin{aligned}\text{sen}(h_s) &= \text{sen}(\delta)(\text{sen}\phi) + \cos(\delta)\cos(\phi)\cos(H) \\ \text{sen}(h_s) &= (-0,5015)(-0,1124) + (0,8651)(0,9938) \\ \text{sen}(h_s) &= 0,9161 \rightarrow h_s = 66,4^\circ\end{aligned}$$

Para a culminação inferior temos $H = 180^\circ$. Logo:

$$\begin{aligned}\text{sen}(h_s) &= (-0,5015)(-0,1124) - (0,8651)(0,9938) \\ \text{sen}(h_s) &= -0,8033 \rightarrow h_s = -53,4^\circ\end{aligned}$$

Ao nascer e ocaso temos $h = 0^\circ$. Logo:

$$\begin{aligned}\cos(H) &= -\tan(\phi)\tan(\delta) \\ \cos(H) &= (0,5797)(-0,1122) = -0,0650 \\ H &= 93,7^\circ \text{ ou } H = 266,3^\circ\end{aligned}$$

Nascer (a leste do meridiano): $H = 266,3^\circ = 17,75\text{h} = 17\text{h } 45\text{min } 05\text{s}$

Ocaso (a oeste do meridiano): $H = 93,7^\circ = 6,25\text{h} = 6\text{h } 14\text{min } 54\text{s}$

$$\Delta T = 12,5\text{h}$$

4) Seja uma estrela passando pelo primeiro vertical a uma altura $h = 35^{\circ}42'$ às 14h 20min 50s siderais. Se sua ascensão reta é $\alpha = 19^{\text{h}} 41^{\text{min}} 06^{\text{s}}$, determine:

- O ângulo horário da estrela neste instante;
- A declinação da estrela;
- A latitude do observador;
- A hora sideral em que a estrela passou pelo círculo das 18 horas.

Solução

$$S = 215,21^{\circ}; \alpha = 295,28^{\circ}$$

Usando a relação entre hora sideral S , ascensão reta α e ângulo horário H , temos:

$$H = S - \alpha = 215,21^{\circ} - 295,28^{\circ} = -80,07^{\circ} = 279,93^{\circ}$$

Usemos agora a analogia dos senos:

$$\frac{\text{sen}(360^{\circ}-H)}{\cos(h)} = \frac{\text{sen}(A)}{\cos(\delta)}$$

$$\cos(\delta) = \frac{\cos(h)}{-\cos(H)} = \frac{0,8121}{0,9850}$$

$$\cos(\delta) = 0,8245 \rightarrow \delta = \pm 34,47^{\circ}$$

Seja agora o cálculo da latitude do observador, ϕ . Como a estrela está passando pelo 1º vertical, seu azimute é $A = 90^{\circ}$. Logo, a fórmula dos 4 elementos que envolve o azimute se simplifica consideravelmente:

$$\text{sen}(\delta) = \text{sen}(h)(\text{sen}\phi)$$

$$\text{sen}(\phi) = \frac{\text{sen}(\delta)}{\text{sen}(h)} = \frac{\pm 0,5659}{0,5835}$$

$$\text{sen}(\phi) = \pm 0,9698 \rightarrow \phi = \pm 75,87^{\circ}$$

O círculo das 18h é aquele que corresponde a $H_{18} = 270^{\circ} = 18^{\text{h}}$.

$$H_{18} = 270^{\circ} \rightarrow H_{18} = H - 9,93^{\circ}$$

$$S_{18} = S - 9,93^{\circ} = 215,21^{\circ} - 9,93^{\circ} = 205,28^{\circ}$$

$$S_{18} = 13^{\text{h}} 41^{\text{min}} 07^{\text{s}}$$

5) Prove que, no momento da elongação de uma estrela ($Q = \pm 90^{\circ}$), são válidas as seguintes expressões:

$$\text{sen}(h) = \frac{\text{sen}(\phi)}{\text{sen}(\delta)}; \text{sen}(H) = \pm \frac{\cos(h)}{\cos(\phi)}; \cos(A) = \frac{\tan(\phi)}{\tan(h)}; \cos(H) = \frac{\tan(\phi)}{\tan(\delta)}; \text{sen}(A) = \pm \frac{\cos(\delta)}{\cos(\phi)}$$

Solução

Usando a fórmula dos 4 elementos associada ao ângulo Q :

$$\cos(90^{\circ}-\phi) = \cos(90^{\circ}-\delta)\cos(z) + \text{sen}(90^{\circ}-\delta)\text{sen}(z)\cos(Q)$$

$$\text{sen}(\phi) = \text{sen}(\delta)\text{sen}(h)$$

$$\text{sen}(h) = \frac{\text{sen}(\phi)}{\text{sen}(\delta)}$$

Pela analogia dos senos:

$$\frac{\text{sen}(H)}{\text{sen}(z)} = \frac{\text{sen}(Q)}{\text{sen}(90^\circ - \phi)}$$

$$\text{sen}(H) = \pm \frac{\cos(h)}{\cos(\phi)}$$

Aplicando a fórmula dos 4 elementos associada ao ângulo horário H:

$$\cos(z) = \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \phi) + \text{sen}(90^\circ - \delta) \text{sen}(90^\circ - \phi) \cos(H)$$

$$\text{sen}(h) = \text{sen}(\delta) \text{sen}(\phi) + \cos(\delta) \cos(\phi) \cos(H)$$

$$\cos(H) = \frac{\text{sen}(h) - \text{sen}(\delta) \text{sen}(\phi)}{\cos(\delta) \cos(\phi)}$$

Substituindo sen(h) pela expressão já deduzida:

$$\cos(H) = \frac{\text{sen}(\phi) \left(\frac{1}{\text{sen}(\delta)} - \text{sen}(\delta) \right)}{\cos(\delta) \cos(\phi)}$$

$$\cos(H) = \frac{\tan(\phi) \cos^2(\delta)}{\text{sen}(\delta) \cos(\delta)}$$

$$\cos(H) = \frac{\tan(\phi)}{\tan(\delta)}$$

Finalmente, aplicando a fórmula dos 4 elementos uma última vez:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \phi) \cos(z) + \text{sen}(90^\circ - \phi) \text{sen}(z) \cos(A)$$

$$\cos(A) = \frac{\text{sen}(\delta) - \text{sen}(h) \text{sen}(\phi)}{\cos(h) \cos(\phi)}$$

Usando novamente a expressão para sen(h):

$$\cos(A) = \frac{\text{sen}(\phi) \left(\frac{1}{\text{sen}(h)} - \text{sen}(h) \right)}{\cos(h) \cos(\phi)}$$

$$\cos(A) = \frac{\tan(\phi) \cos^2(h)}{\text{sen}(h) \cos(h)}$$

$$\cos(A) = \frac{\tan(\phi)}{\tan(h)}$$

6) Considere o Sol no dia do solstício de dezembro (início do verão no hemisfério Sul da Terra). Vamos assumir que durante todo este dia sua declinação se mantém constante, de valor $\delta = -23^\circ 27'$. Responda:

a) Quais os valores de ângulo horário do Sol no instante do seu nascer e de seu ocaso no céu de Porto Alegre ($\phi = -30^\circ$)?

b) Quanto tempo o Sol permanecerá acima e abaixo do horizonte neste dia?

c) Quais os valores de azimuth do Sol ao nascer e ocaso neste dia?

Solução

$$\delta_{\odot} = -23,45^\circ$$

Usando a fórmula dos 4 elementos associada ao ângulo horário H do Sol:

$$\sin(h) = \sin(\delta)\sin(\phi) + \cos(\delta)\cos(\phi)\cos(H)$$

Mas $h = 0^\circ$ ao nascer e ocaso. Logo:

$$\cos(H) = -\tan(\delta)\tan(\phi)$$

$$\cos(H) = -(-0,5774)(-0,4338) = -0,2505 \rightarrow$$

$$\rightarrow H = 104,5^\circ \text{ ou } H = 255,5^\circ$$

Nascer (a leste do meridiano): $H = 255,5^\circ = 17\text{h } 01\text{min } 58\text{s}$;

Ocaso (a oeste do meridiano): $H = 104,5^\circ = 6\text{h } 58\text{min } 02\text{s}$;

Tempo acima do horizonte: $\Delta T = 13\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$;

Tempo abaixo do horizonte: $\Delta T = 10\text{h } 03\text{min } 56\text{s}$.

Seja agora a fórmula dos 4 elementos associada ao azimuth A :

$$\sin(\delta) = \sin(\phi)\sin(h) + \cos(h)\cos(\phi)\cos(A)$$

Mas $h = 0^\circ$. Logo:

$$\cos(A) = \frac{\sin(\delta)}{\cos(\phi)}$$

$$\cos(A) = \frac{-0,3979}{0,8651} = -0,4599$$

$$A = 117,4^\circ \text{ (nascer) ou } A = 242,6^\circ \text{ (ocaso)}$$

7) Seja a estrela τ *Tauris* ($\alpha = 4\text{h } 41\text{min } 3\text{s}$ e $\delta = 22^\circ 55' 03,4''$). Do ponto de vista de um observador em São Paulo (latitude $\phi = -23^\circ 27'$), determine:

a) A hora sideral em que ela atravessa o 1º e o 2º verticais;

b) A altura em que ela atravessa os mesmos verticais;

c) A velocidade zenital da estrela nestes instantes;

d) O valor de Q da estrela ao atravessar os dois verticais;

e) A velocidade azimutal nestes instantes.

Solução

$$\alpha = 4,68\text{h} = 70,3^\circ; \delta = 22,92^\circ; \phi = -23,45^\circ$$

Para determinar a hora sideral S em um dado instante, precisamos apenas saber o ângulo horário H da estrela, já que sua ascensão reta α é conhecida. Determinaremos inicialmente a altura da estrela ao cruzar os verticais:

$$\text{sen}(\delta) = \text{sen}(\phi)\text{sen}(h) + \cos(h)\cos(\phi)\cos(A)$$

Mas $A = 90^\circ$ ou $A = 270^\circ$. Logo:

$$\text{sen}(h) = \frac{\text{sen}(\delta)}{\text{sen}(\phi)} = \frac{0,3894}{-0,3979}$$

$$\text{sen}(h) = -0,9785 \rightarrow h = -78,1^\circ$$

Lembre-se que o movimento diurno é simétrico com relação ao meridiano e a posição dos verticais também o é. Assim, a altura obtida acima se aplica a ambos os verticais.

Conhecida a altura h , podemos aplicar outra fórmula dos 4 elementos para determinar H :

$$\text{sen}(h) = \text{sen}(\delta)\text{sen}(\phi) + \cos(\delta)\cos(\phi)\cos(H)$$

$$\cos(H) = \frac{\text{sen}(h) - \text{sen}(\delta)\text{sen}(\phi)}{\cos(\delta)\cos(\phi)}$$

$$\cos(H) = \frac{-0,9785 - (-0,3979)(0,3894)}{(0,9174)(0,921)} = -\frac{0,8235}{0,8449} = -0,9746 \rightarrow$$

$$\rightarrow H = 167,06^\circ \text{ ou } H = 192,94^\circ$$

A correspondência entre os dois valores de A e os dois valores de H tem que respeitar a convenção:

Leste do meridiano: $0^\circ < A < 180^\circ$; $180^\circ < H < 360^\circ$

Oeste do meridiano: $180^\circ < A < 360^\circ$; $0^\circ < H < 180^\circ$

Logo:

$$A = 90^\circ \rightarrow H = 192,94^\circ = 12\text{h } 51\text{min } 46\text{s}$$

$$A = 270^\circ \rightarrow H = 167,1^\circ = 11\text{h } 08\text{min } 14\text{s}$$

Cálculo da velocidade zenital:

$$h = -78,1^\circ \rightarrow z = 168,1^\circ$$

$$\frac{\partial z}{\partial H} = \frac{(0,9174)(0,9210)(0,2239)}{0,2062} = \pm 0,9174$$

O valor de Q pode ser determinado usando-se a fórmula dos 4 elementos correspondente:

$$\text{sen}(\phi) = \text{sen}(\delta)\text{sen}(h) + \cos(\delta)\cos(h)\cos(Q)$$

$$\cos(Q) = \frac{\text{sen}(\phi) - \text{sen}(\delta)\text{sen}(h)}{\cos(\delta)\cos(h)}$$

$$\cos(Q) = \frac{-0,3979 - (0,3894)(-0,9785)}{(0,9210)(0,2062)} = \frac{-0,0169}{0,1899} = -0,0889 \rightarrow$$

$$\rightarrow Q = 95,1^\circ$$

Conhecido Q , temos então a velocidade azimutal pela fórmula:

$$\frac{\partial A}{\partial H} = \frac{\cos(\delta)\cos(Q)}{\text{sen}(z)}$$

$$\frac{\partial A}{\partial H} = \frac{(0,9210)(-0,0889)}{(0,2062)} = -0,3971$$

8) Considere as fórmulas de Astronomia Esférica no caso de um observador situado no Equador da Terra, ou seja, de latitude $\phi = 0^\circ$. Prove que, neste caso, as fórmulas se simplificam, sendo válidas as seguintes expressões:

$$\cos(H) = \frac{\text{sen}(h)}{\cos(\delta)}; \text{sen}(H) = -\tan(\delta)\tan(A); \cos(A) = \frac{\text{sen}(\delta)}{\cos(h)}; \text{sen}(A) = -\tan(h)\tan(H)$$

Solução

Usando uma das fórmulas dos 4 elementos:

$$\text{sen}(h) = \text{sen}(\delta)\text{sen}(\phi) + \cos(\delta)\cos(\phi)\cos(H)$$

E considerando que, no caso em questão, $\text{sen}(\phi) = 0$ e $\cos(\phi) = 1$, teremos:

$$\text{sen}(h) = \cos(\delta)\cos(H)$$

$$\cos(H) = \frac{\text{sen}(h)}{\cos(\delta)}$$

Considerando agora a fórmula dos 4 elementos que envolve o azimute A,

$$\text{sen}(\delta) = \text{sen}(\phi)\text{sen}(h) + \cos(h)\cos(\phi)\cos(A)$$

Teremos para o caso $\phi = 0^\circ$:

$$\text{sen}(\delta) = \cos(h)\cos(A)$$

$$\cos(A) = \frac{\text{sen}(\delta)}{\cos(h)}$$

Usando a analogia dos senos, temos:

$$\text{sen}(H) = -\frac{\text{sen}(A)\cos(h)}{\cos(\delta)}$$

Substituindo então $\cos(h)$ por $\text{sen}(\delta)/\cos(A)$, tal como deduzido acima, teremos:

$$\text{sen}(H) = -\frac{\text{sen}(A)\cos(h)}{\cos(A)\cos(\delta)}$$

$$\text{sen}(H) = -\tan(A)\tan(\delta)$$

Finalmente, a expressão para $\text{sen}(A)$ decorre novamente da analogia dos senos:

$$\text{sen}(A) = -\frac{\cos(\delta)\text{sen}(H)}{\cos(h)}$$

Substituindo $\cos(\delta)$ por $\text{sen}(h)/\cos(H)$, tal como verificado acima,

$$\text{sen}(A) = -\frac{\text{sen}(h)\text{sen}(H)}{\cos(h)\cos(H)} = -\tan(h)\tan(H)$$

9) Prove que uma estrela situada sobre o equador celeste, ou seja, de declinação $\delta = 0^\circ$, sempre nasce exatamente no ponto cardeal leste e sempre se põe no ponto cardeal oeste. Prove ainda que o ângulo horário desta estrela ao nascer será sempre $H = 270^\circ$ e ao se por ele será $H = 90^\circ$.

Solução

Se $\delta = 0^\circ$, podemos provar, usando as fórmulas dos 4 elementos, que:

$$\text{sen}(h) = \text{sen}(\delta)\text{sen}(\phi) + \cos(\delta)\cos(\phi)\cos(H)$$

$$\text{sen}(h) = \cos(\phi)\cos(H)$$

$$\text{sen}(\delta) = \text{sen}(\phi)\text{sen}(h) + \cos(h)\cos(\phi)\cos(A)$$

$$\cos(A) = -\tan(\phi)\tan(h)$$

Ao nascer e ocaso, a altura é $h = 0^\circ$. Logo estas fórmulas se simplificam ainda mais:

$$\cos(\phi)\cos(H) = 0$$

$$\cos(A) = 0$$

A 1ª destas expressões tem que ser válida para qualquer valor da latitude ϕ do observador. Isso significa que $\cos(H) = 0$ independentemente da latitude. Logo $H = 90^\circ$ (ocaso) ou $H = 270^\circ$ (nascer).

Quanto à 2ª expressão, ela obviamente implica que $A = 90^\circ$ ou $A = 270^\circ$, valores de azimute que corresponde aos pontos cardeais leste e oeste, respectivamente.

10) Considere a estrela *Achernar* (α do *Eridano*). Sabendo-se que suas coordenadas equatoriais são ascensão reta $\alpha = 1\text{h } 37\text{min } 42,9\text{s}$ e declinação $\delta = -57^\circ 14' 12''$, determine:

a) As suas coordenadas horizontais no instante de sua elongação no céu de um observador no Rio de Janeiro ($\phi = -22^\circ 53' 43''$). Dica: na elongação $Q = \pm 90^\circ$;

b) A hora sideral no instante da elongação de *Achernar* para o mesmo observador.

Solução

a) Vimos em problema anterior que na elongação, a fórmula dos 4 elementos para o ângulo Q se simplifica:

$$\text{sen}(\phi) = \text{sen}(\delta)\text{sen}(h) + \cos(h)\cos(\delta)\cos(Q)$$

$$\text{sen}(\phi) = \text{sen}(\delta)\text{sen}(h)$$

A altura da estrela no instante da elongação é dada então pela expressão:

$$\text{sen}(h) = \frac{\text{sen}(\phi)}{\text{sen}(\delta)} = \frac{\text{sen}(-22^\circ 53' 43'')}{\text{sen}(-57^\circ 14' 12'')} = \frac{-0,38905}{-0,84001}$$

$$\text{sen}(h) = 0,46315 \rightarrow h = 27^\circ 35' 26''$$

Para determinar o azimute, podemos usar a analogia dos senos:

$$\frac{\text{sen}(A)}{\cos(\delta)} = -\frac{\text{sen}(Q)}{\cos(\phi)}$$

$$\text{sen}(A) = \pm \frac{\cos(\delta)}{\cos(\phi)}$$

Os dois sinais na expressão acima resultam do fato que há duas elongações de um astro a cada dia, uma para $Q = 90^\circ$ outra para $Q = -90^\circ$. A fórmula que usamos para determinar a altura h envolve $\cos(Q)$, o que naturalmente leva a um único valor de altura, válido em ambas as elongações. Mas no caso do azimute, sabemos que uma elongação se dará a leste e a outra a oeste do meridiano astronômico do observador, o que matematicamente se obtêm com a presença de $\text{sen}(Q)$ acima.

Os valores de A serão então obtidos por:

$$\text{sen}(A) = \pm \frac{\cos(-57^\circ 14' 12'')}{\cos(-22^\circ 53' 43'')} = \pm \frac{0,54257}{0,92365} = \pm 0,58742$$

Note que há 4 valores de azimute que satisfazem a equação acima. Dois correspondem ao sinal negativo, dois ao sinal positivo.

Para $\text{sen}(A) = 0,58742$:

$$A = 35,97409^\circ = 35^\circ 58' 27''$$

ou

$$A = 144,02591^\circ = 144^\circ 01' 33''$$

Para $\text{sen}(A) = -0,58742$:

$$A = -35,97409^\circ = 324,02591^\circ = 324^\circ 01' 33''$$

ou

$$A = 215,97409^\circ = 215^\circ 58' 27''$$

Destes, temos que escolher somente dois valores, um para cada elongação. Uma maneira de resolver esta questão é usar a fórmula dos 4 elementos para A , que no caso de elongação, como vimos em problema anterior, se torna:

$$\cos(A) = \frac{\tan(\phi)}{\tan(h)}$$

$$\cos(A) = \frac{\tan(-22^\circ 53' 43'')}{\tan(27^\circ 35' 26'')} = \frac{-0,41491}{0,52258} = -0,79397$$

Logo, os valores de azimute em questão têm que ser ângulos de 2º e 3º quadrantes:

$$A = 144^\circ 01' 33'' \text{ (elongação a leste)}$$

e

$$A = 215^\circ 58' 27'' \text{ (elongação a oeste)}$$

Na verdade, por se tratar de um observador situado no Hemisfério Sul, e lembrando que a elongação só se dá para estrelas com $|\delta| > |\phi|$, poderíamos ter imediatamente escolhido os valores do 2º e 3º quadrantes, pois a estrela necessariamente está sempre a sul do vertical que contém o zênite e os pontos L e W.

b) Cálculo da hora sideral:

No caso em que $Q = \pm 90^\circ$, a fórmula para $\cos(H)$ fica:

$$\cos(H) = \frac{\tan(\phi)}{\tan(\delta)}$$

$$\cos(H) = \frac{\tan(-22^\circ 53' 43'')}{\tan(-57^\circ 14' 12'')} = \frac{-0,41491}{-1,55388} = 0,26702$$

Logo:

$$H = 74,51324^\circ = 74^\circ 30' 48'' \text{ (elongação a oeste)}$$

e

$$H = 285,48675^\circ = 285^\circ 29' 12'' \text{ (elongação a leste)}$$

As horas siderais correspondentes serão então:

$$S = H + \alpha = \frac{74^\circ 30' 48''}{15} + 1\text{h } 37\text{min } 42,9\text{s} = 6\text{h } 35\text{min } 46\text{s}$$

e

$$S = H + \alpha = \frac{285^\circ 29' 12''}{15} + 1\text{h } 37\text{min } 42,9\text{s} = 20\text{h } 39\text{min } 40\text{s}$$

Exercícios sobre Sistemas de Tempo

1) Seja um lugar de longitude $\lambda = 3\text{h } 17\text{min } 05,18\text{s}$. No dia 26/10/99, calcular a hora sideral média às 20h 30min de hora solar média local. Observação: considere que a longitude é positiva para meridianos a oeste de Greenwich.

Solução

Hora média local:

$$M = 20\text{h } 30\text{min } 00\text{s}$$

Pelas Efemérides Astronômicas do ON, a hora sideral em Greenwich ($\lambda = 0^\circ$) à 0h TU do dia em questão é:

$$S_{0G} = 2\text{h } 15\text{m } 42,984\text{s}$$

Determinando a hora sideral local no instante considerado:

$$S = S_{0G} + (M + \lambda)\eta + M$$

onde $\eta = 0,00273790926$ e λ é a longitude do local.

$$M + \lambda = 23\text{h } 47\text{min } 05,18\text{s}$$

$$(M + \lambda)\eta = 0,06512 = 3\text{min } 54,43\text{s}$$

$$S = 22\text{h } 45\text{min } 42,984\text{s} + 3\text{min } 54,43\text{s} = 22\text{h } 49\text{min } 37,414\text{s}$$

2) Determinar a hora solar média no dia 26/10/99 às 14h 36min 43,3s siderais verdadeiras de um observador de longitude $\lambda = 6\text{h } 21\text{min } 24,56\text{s}$.

Solução

Pelas Efemérides Astronômicas do ON, a hora sideral verdadeira em Greenwich à 0h TU será:

$$S_{0G} = 2h \ 15min \ 42,054s$$

A hora sideral à zero hora média local ($M = 0h$) é dada pela expressão:

$$S_0 = S_{0G} + (1 - \mu)$$

O intervalo de tempo sideral decorrido entre o instante considerado e $M = 0h$ é então:

$$\Delta S = S - S_0 = S - S_{0G} - \lambda\eta$$

onde:

$$S = 14h \ 36min \ 43,3s.$$

A transformação de um intervalo de hora sideral em um intervalo de hora solar é:

$$\Delta M = \Delta S (1 - \mu)$$

onde:

$$1 - \mu = 1/(1 + \eta) = 1 - 0,00273043359.$$

A hora solar média no instante pedido será então:

$$M = (S - S_{0G} - \lambda\eta) (1 - \mu)$$

$$M = (S - S_{0G} - \lambda\eta) - (S - S_{0G} - \lambda\eta)\mu$$

onde:

$$\lambda = 6,356822$$

$$\mu = 0,00273043359$$

$$\eta = 0,00273790926$$

Calculando:

$$S - S_{0G} - \lambda\eta = 12h \ 21min \ 1,246s - 0,017404h = 12,33294h$$

$$M = 12,33294 (1 - \mu) = (12,33294)(0,99727) = 12,29926$$

$$M = 12h \ 17min \ 57,3s$$

3) Qual a longitude de um observador cuja hora sideral é $S = 13h \ 26min \ 51,4s$ à 0h TU no dia 10/11/99? Dados: Hora Sideral em Greenwich à $M_G = 0h$:

$$S_0 = 3h \ 14min \ 51,3s.$$

Solução

Pelas Efemérides do ON, na data em questão a hora sideral em Greenwich à 0h TU é: $S_{0G} = 3h \ 14min \ 51,314s$.

Trata-se do mesmo instante no tempo considerado no enunciado da questão. Estamos, portanto lidando com a diferença de hora sideral em um dado instante fixo no tempo.

Essa diferença de hora sideral é, portanto:

$$\Delta S = 10h \ 12min \ 0,09s$$

Sendo que o meridiano cuja longitude desejamos saber está adiantado com relação a Greenwich, a leste do mesmo.

Logo:

$$\lambda = 153,00^\circ \text{ E}$$

4) Determine a longitude de um local cuja hora sideral média é $S = 11\text{h } 49\text{min } 20,7\text{s}$ às $8\text{h } 14\text{min } 33\text{s}$ de hora solar média local do dia 15/11/99.

Solução

Pelas Efemérides do ON, a hora sideral em Greenwich à 0h TU é:

$$S_{0G} = 3\text{h } 34\text{min } 34,091\text{s}$$

À zero hora solar média local ($M = 0\text{h}$), a hora sideral média local é:

$$S_0 = S_{0G} + \lambda\eta$$

O intervalo sideral decorrido até o instante considerado é então:

$$\Delta S = S - S_0 = S - S_{0G} - \lambda\eta$$

O intervalo solar correspondente será então:

$$\Delta M = \Delta S (1 - \mu)$$

onde:

$$1 - \mu = 1/(1 + \eta) = 1 - 0,00273043359.$$

Mas como o instante inicial corresponde a $M = 0\text{h}$, o valor do intervalo é igual à hora solar média local do instante considerado:

$$\Delta M = M = (S - S_{0G} - \lambda\eta) - (S - S_{0G} - \lambda\eta)\mu$$

Temos que resolver esta equação para a longitude:

$$\lambda = \frac{M + S_{0G}(1 - \mu) + S(\mu - 1)}{\eta(\mu - 1)}$$

$M = 8,242500\text{h}$; $S_{0G} = 3,576136\text{h}$; $S = 11,822423\text{h}$; $\mu = 0,00273043359$; $\eta = 0,00273790926$.

$$\lambda = \frac{8,242500 + 3,566372 - 11,790143}{-0,00273043}$$

$$\lambda = -6,8595\text{h} = -102,8923^\circ = 102,8923^\circ \text{ E}$$

5) Qual a hora solar verdadeira no instante em que o Sol Médio fez sua culminação superior para um observador de longitude $\lambda = 3\text{h } 30\text{min } 30,5\text{s}$ no dia 26/01/94?

Solução

O Sol Médio cruzou o meridiano às 12 horas solares médias locais.

Pelas Efemérides do IAG-USP, temos para a equação do tempo (à 0h TU no dia considerado):

$$\varepsilon = \alpha_V - \alpha_M = M - V = -12\text{min } 26,35\text{s}$$

A hora verdadeira correspondente a este instante foi então:

$$V = M - \varepsilon = 12h + 12min\ 26,35s = 12h\ 12min\ 26,35s$$

Mas o valor de ε acima corresponde à 0h TU. Temos que saber o valor da equação do tempo para a hora considerada.

Novamente, pelas Efemérides do IAG-USP, temos a taxa de variação horária da ascensão reta do Sol verdadeiro (em s/hora):

$$\frac{\partial \alpha_v}{\partial t} = \frac{10,407s}{h}$$

O Sol Médio, por percorrer o equador celeste a uma velocidade angular constante, tem uma taxa de:

$$\frac{\partial \alpha_M}{\partial t} = \frac{9,836s}{h}$$

Logo, para a taxa de variação da equação do tempo, inferimos:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \alpha_M}{\partial t} = \frac{0,571s}{h}$$

Em termos de hora solar verdadeira e média, teremos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

Assim, mantendo M fixo em 12h, e considerando que entre 0h TU e o instante considerado ter-se-ão decorrido $M + \lambda$ horas solares, teremos:

$$\Delta V = -(M + \lambda) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

$$\Delta V = -8,855s$$

Logo,

$$V = 12h\ 12min\ 26,35s - 8,855s = 12h\ 12min\ 17,50s$$

6) Provar que a equação do tempo, definida como $\varepsilon = \alpha_v - \alpha_M$, onde α_v e α_M são, respectivamente, as ascensões retas do Sol verdadeiro e médio, pode ser expressa como:

$$\varepsilon = U + Q$$

onde $U = \lambda_v - \lambda_f$ é a equação do centro (λ_v e λ_f são, respectivamente, as longitudes eclípticas do Sol verdadeiro e fictício) e $Q = \alpha_v - \alpha_M$ é a redução ao equador.

Solução

$$\alpha_v = \varepsilon + \alpha_M = Q + \lambda_v$$

Logo:

$$\varepsilon = Q + \lambda_v - \alpha_M$$

Mas o sol médio caminha uniformemente sobre o equador celeste assim como o sol fictício o faz pela eclíptica. Assim sendo:

$$\alpha_M = \lambda_f$$

$$\varepsilon = Q + \lambda_V - \lambda_f = Q + U$$

7) Defina tempo universal. Defina os diferentes tipos de tempo universal e discuta suas diferenças.

Solução

Tempo Universal é a hora solar média do meridiano de Greenwich ($\lambda = 0^\circ$).

O tempo universal é um tempo rotacional, ou seja, é medido com base no ângulo horário do Sol médio, que, como sabemos, varia devido à rotação da Terra.

Infelizmente, o movimento de rotação da Terra não é uniforme e não se dá rigorosamente em torno de um eixo que tenha sempre os mesmos pólos. Isso leva às seguintes definições de tempo universal:

TU0: é simplesmente obtido através de observações astronômicas. Como o Sol Médio percorre o equador celeste uniformemente, sabemos qual o valor de sua ascensão reta a cada instante e podemos determinar então o ângulo horário do Sol Médio a cada instante pelas observações.

TU1: é o resultado da correção de TU0 para o movimento do pólo, pelo qual a longitude (e também a latitude) de um local varia com o tempo.

TU2: é o resultado da correção de TU1 para a variação da velocidade de rotação da Terra.

8) Seja um lugar de longitude $\lambda = -9^h 35^m 31,4^s$. No dia 30/11/99, calcular a hora sideral média às 19h 16min 52,7s horas solares médias locais.

Dicas: Faz-se necessário consultar, na Biblioteca da Física, as efemérides (*Astronomical Almanac* ou *Apparent Places of Fundamental Stars* ou Efemérides do ON ou Efemérides do IAG), para saber o valor da hora sideral em Greenwich à MG = 0h no dia considerado.

Solução

Pelas Efemérides Astronômicas do ON, na data considerada a hora sideral em Greenwich à 0h TU é:

$$S_0 = 4^h 33^m 42,422^s = 4,56178^h$$

Esta é a hora sideral em Greenwich à zero hora TU.

$$M = 19^h 16^m 52,7^s = 19,28130^h$$

$$\lambda = -9,59205^h$$

$$\eta = 0,00273790926$$

$$S = S_0 + (M + \lambda)\eta + M$$

$$S = 4,56178 + (19,28130 - 9,59205)(0,00273790926) + 19,28130$$

$$S = 23,86961^h = 23^h 52^m 10,6^s$$

9) Qual o melhor dia do ano para observarmos a estrela ρ Ceti, cujos valores médios de ascensão reta e declinação para 1999 são $\alpha = 2\text{h } 25\text{min } 54,01\text{s}$ e $\delta = 12^\circ 17' 42,0''$?

Solução

O melhor dia para se observar a estrela será aquele em que ela fizer sua culminação superior o mais próximo possível da 0h solar verdadeira do observador.

É comum as Efemérides [como a do ON ou o *Astronomical Almanac* (EUA)] listarem a hora sideral à 0h TU para um observador no meridiano de Greenwich (longitude $\lambda = 0^\circ$).

Nas Efemérides do ON, por exemplo, encontramos esta lista na seção F. Vemos que nos dias 28/10 e 29/10, a hora sideral à 0h TU em Greenwich é bem próxima da ascensão reta da estrela. Mas precisamos transformar estes valores para hora sideral à 0h solar verdadeira e na nossa longitude ($\lambda_{\text{PoA}} = 51^\circ 13'$).

São duas transformações, portanto: uma de hora solar média para verdadeira e a outra da longitude de Greenwich para a longitude de PoA.

A primeira transformação envolve a equação do tempo:

$$\varepsilon = M - V$$

onde M e V são as horas solares média e verdadeira correspondentes a um determinado instante. A equação do tempo é essencialmente dada na seção C das Efemérides do ON: ela corresponde à diferença entre a coluna “passagem meridiano Greenwich” e 12h.

Note que para os dias citados acima, $\varepsilon \cong -6\text{min}$, não sendo desprezível. Isso significa que a hora sideral à 0h solar verdadeira em Greenwich neste dias é aproximadamente $S \cong 2\text{h } 07\text{min}$ para 28/10 e $S \cong 2\text{h } 11\text{min}$ para 29/10.

Já a transformação em λ será:

$$S = S_G + \lambda\eta$$

onde:

S e S_G são as horas siderais à 0h solar verdadeira em PoA e Greenwich, respectivamente. $\eta = 0,00273790926$.

Dessa forma temos uma correção adicional:

$$\Delta S = \frac{51,21^\circ}{15} 0,00273790926h = 0,00934844h = 33,6s$$

Levando estas correções em conta, chegamos então à conclusão de que o melhor dia de observação é 02/11. Para ele teremos:

Hora sideral à 0h TU à $\lambda = 0^\circ$: 2h 43min 18,871s

Equação do tempo: $\varepsilon = -16\text{min } 25,61\text{s}$

Intervalo sideral entre passagem meridiana do Sol Médio e passagem meridiana do Sol verdadeiro: $\Delta S = \varepsilon (1+\eta) = -16\text{min } 28,31\text{s}$.

Hora sideral à 0h Sol. Ver. à $\lambda = 0^\circ$: $2\text{h } 43\text{min } 18,871\text{s} - 16\text{min } 28,31\text{s} = 2\text{h } 26\text{min } 50,56\text{s}$.

Hora sideral à 0h Sol. Ver. à $\lambda = 51^\circ 13'$: $2\text{h } 26\text{min } 50,56\text{s} + 33,6\text{s} = 2\text{h } 27\text{min } 24,16\text{s}$.

Este valor é o mais próxima do valor de α da estrela considerada.

10) Um observador mede o ângulo horário do Sol e obtêm $H_\odot = 240^\circ$. Responda:

a) Qual a hora solar deste observador neste instante?

b) Qual a hora sideral deste observador neste instante sabendo-se que a ascensão reta do Sol é $\alpha_\odot = 13\text{h}$?

c) Qual o ângulo horário do ponto neste instante?

d) Se neste instante são meio-dia no meridiano de Greenwich, qual a longitude do observador?

Solução

a) Hora solar baseada na posição do Sol no céu tem que ser a verdadeira:

$$V = H_\odot + 12\text{h} = \frac{240^\circ}{15^\circ} + 12$$

$$V = 16\text{h} + 12\text{h} = 28\text{h} = 4\text{h}$$

b)

$$S = \alpha_\odot + H_\odot = 13\text{h} + 16\text{h} = 29\text{h} = 5\text{h}$$

c)

$$S = H_\gamma = 5\text{h} = 75^\circ$$

d)

$$TU = 12\text{h} = V + \varepsilon + \lambda$$

$$\lambda = 12\text{h} - 4\text{h} - \varepsilon = 8\text{h} - \varepsilon$$

Precisamos então saber o valor da equação do tempo ε neste dia.

Exercícios sobre variação de Coordenadas Equatoriais

1) Determine as correções para o efeito de precessão das coordenadas equatoriais α e δ da estrela *Pollux* (α *Gemini*) entre o dia 30/01/01 e o meio do mesmo ano (redução ao dia para precessão).

Dados: coordenadas de *Pollux* para o equinócio médio do ano 2001 (2001.5): $\alpha_{2001.5} = 7\text{h } 45\text{min } 24,4\text{s}$ e $\delta_{2001.5} = 28^\circ 01' 21''$; precessão anual em ascensão reta: $m = 3,0750 \text{ s/ano}$; precessão anual em declinação: $n = 20,0430 \text{ "/ano}$; fração do ano correspondente ao intervalo: $\tau = -0,4199$.

Solução

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = n \cos(\alpha)$$

$$\Delta \delta = n \cos(\alpha) \Delta t = \frac{20,043''}{ano} (-0,44388)(-0,4199) ano$$

$$\Delta \delta = 3,7357''$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = m + n \sin(\alpha) \tan(\delta)$$

$$\Delta \alpha = [m + n \sin(\alpha) \tan(\alpha)] \Delta t$$

$$\Delta \alpha = \left[\frac{3,075s}{ano} + \frac{20,043''}{ano} (0,89609)(0,53221) \right] (-0,4199)$$

$$\Delta \alpha = -1,291s - 0,26758s = -1,558s$$

2) Aplicar as correções para o efeito de nutação das coordenadas equatoriais α e δ da estrela *Pollux* (α Gemini) para o dia 30/01/01 (redução ao dia para nutação).

Dados: coordenadas de *Pollux* para o equinócio médio do ano 2001 (2001,5): $\alpha_{2001,5} = 7h 45min 24,4s$ e $\delta_{2001,5} = 28^\circ 01' 21''$; obliquidade da eclíptica: $\varepsilon = 23,44^\circ$. Coeficientes de nutação para o dia considerado: em obliquidade, $\delta \varepsilon = -2,176''$; em longitude, $\delta \lambda = -15,494''$.

Solução

$$\Delta \alpha = [\cos(\varepsilon) + \sin(\varepsilon) \sin(\alpha) \tan(\delta)] \delta \lambda - \cos(\alpha) \tan(\delta) \delta \varepsilon$$

$$\Delta \alpha = [0,9175 + (0,3978)(0,89609)(0,53221)](-15,494'') + (0,44388)(0,53221)(-2,176'')$$

$$\Delta \alpha = -14,2157 - 2,9394 - 0,5140 = -17,669''$$

$$\Delta \delta = \sin(\varepsilon) \cos(\alpha) \delta \lambda + \sin(\alpha) \delta \varepsilon$$

$$\Delta \delta = (0,3978)(-0,44388)(-15,494'') + (0,89609)(-2,176'')$$

$$\Delta \delta = 2,7359 - 1,950 = 0,786''$$

3) Sabendo-se que os componentes de movimento próprio de uma estrela são

$$\mu_\alpha = \frac{22,67s}{século} \text{ e } \mu_\delta = \frac{-43,32''}{século}, \text{ calcular as correções } \Delta \alpha \text{ e } \Delta \delta \text{ devidas ao movimento próprio entre}$$

as épocas 1950,0 e 2001,5.

Solução

$$\Delta \alpha = \tau \mu_\alpha$$

$$\Delta \alpha = 0,515 século \frac{22,67s}{século} = 11,67s$$

$$\Delta \delta = \tau \mu_\delta$$

$$\Delta \delta = 0,515 século \frac{-43,32''}{século} = -22,31''$$

4) Seja uma estrela de coordenadas $\alpha = 18^{\text{h}} 44^{\text{min}} 51,239^{\text{s}}$ e $\delta = -12^{\circ} 56' 19,35''$ na época 1999,5. Aplicar a redução (correções $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ para precessão, nutação e aberração anual) ao dia 10/12/99 usando o método dos Números Besselianos.

Dados: razão entre os termos de precessão: $m/n = 2,30125$; obliquidade da eclíptica: $\tan(\epsilon) = 0,43355$.

Dica: Obter no *Astronomical Almanac* de 1999 os Números Besselianos para o dia considerado.

Solução

$$\alpha = 18,7475664h = 281,2134960^{\circ}$$

$$\delta = -12,9387083^{\circ}$$

Cômputo das constantes Besselianas:

$$a = \frac{m}{n} + \sin(\alpha) \tan(\delta)$$

$$a = 2,30125 + (-0,9809094)(-0,2297417) = 2,5266058$$

$$b = \cos(\alpha) \tan(\delta)$$

$$b = (0,1944654)(-0,2297417) = -0,0446768$$

$$c = \cos(\alpha) \sec(\delta)$$

$$c = (0,1944654)(1,0260513) = 0,1995313$$

$$d = \sin(\alpha) \sec(\delta)$$

$$d = (-0,9809094)(1,0260513) = -1,0064634$$

$$a' = \cos(\alpha) = 0,1944653$$

$$b' = -\sin(\alpha) = 0,9809094$$

$$c' = \tan(\epsilon) \cos(\delta) - \sin(\alpha) \sin(\delta)$$

$$c' = (0,43355)(0,9746101) + (0,9809094)(-0,2239086) = 0,2029082$$

$$d' = \cos(\alpha) \sin(\delta)$$

$$d' = (0,1944654)(-0,2239086) = -0,0435425$$

Extraindo do *Astronomical Almanac* os Números Besselianos para a data pedida:

$$A = 2,949''; B = 6,031''; C = 4,001''; D = 20,343''; E = -0,0020s$$

Fração do ano decorrida:

$$\tau = 0,4384$$

Reduções:

$$\Delta\alpha = Aa + Bb + Cc + Dd + E + J \tan^2(\delta)$$

$$\Delta\alpha = \frac{2,949}{15} 2,5266058 + \frac{6,031}{15} (-0,0446768) + \frac{4,001}{15} 0,1995313 + \frac{20,343}{15} (-1,0064634) + J \tan^2(\delta)$$

$$\Delta\alpha = -0,8349773s$$

$$\Delta\delta = Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + E + J' \tan(\delta)$$

$$\Delta\delta = (2,949)(0,1944653) + (60,31)(0,9809094) + (4,001)(0,2029082) + (20,343)(-0,0435425) + J'\tan(\delta)$$

$$\Delta\delta = 6,415555''$$

5) Seja uma estrela de coordenadas médias $\alpha = 9^h 14^m 35,6s$ e $\delta = -38^\circ 42' 29,90''$ para a época 1999,5. Seu paralaxe é de $p = 0,083''$ e os componentes de seu movimento próprio são $\mu_\alpha = \frac{-0,2487s}{ano}$ e $\mu_\delta = \frac{0,5462''}{ano}$. Determine suas coordenadas aparentes para o dia 23/11/99, corrigindo-as para precessão, nutação, aberração, paralaxe anual e movimento próprio.

Dados: valor de m/n para 1999,5: $m/n = 2,30125$; $\tan(\epsilon) = 0,43355$.

Dicas: Obter no *Astronomical Almanac* 1999 os Números Besselianos, a fração do ano decorrida desde 1999,5 e as coordenadas X e Y da Terra para o dia considerado.

Solução

$$\alpha = 9,2432222h = 138,6483333^\circ; \delta = -38,7083056^\circ$$

Primeiramente, temos que calcular as “constantes besselianas da estrela”:

$$a = \frac{m}{n} + \sin(\alpha)\tan(\delta)$$

$$a = 2,30125 + (0,6606788)(-0,8013891) = 1,7717891$$

$$b = \cos(\alpha)\tan(\delta) = (-0,7506687)(-0,8013891) = 0,6015776$$

$$c = \cos(\alpha)\sec(\delta) = (-0,7506687)(1,2814931) = -0,9619766$$

$$d = \sin(\alpha)\sec(\delta) = (0,6606788)(1,2814931) = 0,8466555$$

$$a' = \cos(\alpha) = -0,7506686$$

$$b' = -\sin(\alpha) = -0,6606790$$

$$c' = \tan(\epsilon)\cos(\delta) - \sin(\alpha)\sin(\delta)$$

$$c' = (0,43355)(0,7803398) - (0,6606788)(-0,6253558) = 0,7514757$$

$$d' = \cos(\alpha)\sin(\delta) = (-0,7506687)(-0,6253558) = 0,4694349$$

Os Números Besselianos para o dia considerado são:

$$A = 1,726''; B = 5,86''; C = 9,251''; D = 18,112''; E = -0,0022s$$

Os Números Besselianos de segunda ordem para o dia considerado são:

$$J = -0,000033s; J' = -0,0002''$$

Os valores das coordenadas retangulares da Terra são:

$$X = 0,482761147; Y = 0,784247192$$

A fração de tempo decorrido desde 1999,5 é:

$$\tau = 0,3919$$

Temos então:

$$\Delta\alpha = Aa + Bb + Cc + Dd + E + J \tan^2(\delta)$$

$$\Delta\alpha = 0,203874 + 0,235016 - 0,593283 + 1,022308 + 0,0022 - 0,000021 = 0,8656943s$$

$$\Delta\delta = Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + E + J' \tan(\delta)$$

$$\Delta\delta = -1,2956542 - 3,8715778 + 6,9519008 + 8,5024067 + 0,00000 = 10,2872351''$$

Correção para movimento próprio:

$$\tau\mu_{\alpha} = (0,3919)(-0,2487) = -0,0974653s$$

$$\tau\mu_{\delta} = (0,3919)(0,5462) = 0,2140558''$$

Finalmente a correção para paralaxe:

$$p(dX - cY) = [0,083](0,408732) - (-0,754427) = 0,096542'' = 0,006436s$$

$$p(dX - cY) = 0,096542'' = 0,006436s$$

$$p(d'X - c'Y) = (0,083)(0,226625 - 0,5893426) = -0,0301056''$$

$$\Delta\alpha = 0,8656943 - 0,0974653 + 0,0064362 = 0,7746649s$$

$$\alpha = 9h 14 min 36,375s$$

$$\Delta\delta = 10,2872351 + 0,2140558 - 0,0301056 = 10,4711853''$$

$$\delta = -38^{\circ} 42' 19,43''$$

- 6) Um observador de latitude $\phi = -30^{\circ}$ observa uma estrela com distância zenital $z = 28^{\circ} 32' 47''$. A temperatura do ar é $T = 10,5^{\circ}C$. Este observador possui um barômetro cuja temperatura é $T' = 9,5^{\circ}C$ e que mede uma pressão atmosférica de $H = 744 mm Hg$. Determine:**
- A correção da posição da estrela devido à refração pela atmosfera.**
 - A distância zenital verdadeira da estrela no instante dado.**

Solução

Inicialmente, vamos aplicar correções à leitura do barômetro, conforme descrito nas Efemérides do ON.

$$H = 744 + 0,1 - 1,1 - 1,0 = 742 mm HG$$

Utilizando as Efemérides do ON:

$$z = 28^{\circ} \rightarrow R_m = 29,7''$$

Correção residual:

$$32'47'' = 0,54639^{\circ}; 10' = 0,16667^{\circ}$$

A correção residual será então:

$$\Delta R_m = 0,20'' \frac{0,54639}{0,16667} = 0,656''$$

Logo:

$$R_m = 30,4''$$

Mas o valor calculado assume condições normais de temperatura e pressão ($T = 25^{\circ}$; $P = 760 mm Hg$). Temos que aplicar correções para a pressão e temperatura. Consultando as tabelas com essas correções, verificamos que se deve multiplicar o resultado acima por uma fator $f = 1,011$. O resultado final é então:

$$R = fR_m = 30,7''$$

Aplicando-se esta correção à distância zenital observada, teremos:

$$Z_{\text{ver}} = Z_{\text{obs}} + R = 28^{\circ}33'17,7''$$

7) Corrigir as coordenadas equatoriais da estrela 289 *G. Puppis* no dia 01/12/99 para o efeito de nutação de curto período.

Dicas: usar as Efemérides do ON de 1999 onde constam os termos de nutação de curto período, tanto em obliquidade quanto em longitude. Usar também o *Apparent Places of Stars* de 1999 para obter as coordenadas aparentes da estrela para o dia considerado e as constantes de correção para nutação de curto período da estrela.

Solução

Pelo *Apparent Places of Stars* 1999, usando interpolação linear, determinamos as coordenadas não corrigidas:

$$\text{Dia 25,2: } \alpha(s) = 33,433s; \delta(") = 20,44''$$

$$\text{Dia 35,1: } \alpha(s) = 33,748s; \delta(") = 22,96''$$

Para o dia 31,0 teremos então:

$$\alpha = 8^{\text{h}} 18^{\text{min}} 33,617s; \delta = -36^{\circ}39'21,92''$$

Os termos da nutação de curto período podem ser lidos das Efemérides do ON:

$$d\phi = 0,167''; d\epsilon = 0,073''$$

Os coeficientes da transformação são lidos do próprio *Apparent Places*:

$$da(\phi) = 0,045; dd(\phi) = -0,23; da(\epsilon) = -0,028; dd(\epsilon) = 0,82$$

A correção será, portanto:

$$\Delta\alpha = da(\phi) d\phi + da(\epsilon) d\epsilon$$

$$\Delta\alpha = (0,045)(0,167) + (-0,028)(0,073)$$

$$\Delta\alpha = 0,00036s$$

$$\Delta\delta = dd(\phi) d\phi + dd(\epsilon) d\epsilon$$

$$\Delta\delta = -0,0384 + 0,05986 = 0,0214600$$

Coordenadas corrigidas:

$$\alpha = 8^{\text{h}} 18^{\text{min}} 33,617s$$

$$\delta = -36^{\circ} 39' 21,94''$$

CAPÍTULO 7

GLOSSÁRIO DE CONCEITOS DE ASTRONOMIA DE POSIÇÃO

Neste apêndice procuramos fazer uma espécie de glossário dos termos e definições já apresentados no texto.

Esfera Celeste

Esfera:

Uma superfície no espaço tridimensional cujos pontos são equidistantes de um centro.

Grande Círculo ou Círculo Máximo:

Um círculo na superfície de uma esfera que a divide em duas metades (hemisférios).

Pequeno Círculo:

Qualquer círculo sobre uma esfera que não seja máximo.

Esfera Celeste:

Um modelo de céu pelo qual o consideramos a superfície de uma esfera centrada em nós. Todos os astros (Sol, Lua, planetas, estrelas, cometas, etc) estão localizados sobre a esfera celeste. A esfera celeste tem as seguintes propriedades:

1. É imaginária.
2. Seu raio é considerado muito maior do que as dimensões da Terra, sendo, portanto, qualquer ponto sobre a superfície desta última igualmente válida como centro da esfera celeste.
3. Apesar das distâncias de diferentes astros à Terra variarem, todos são considerados como situados sobre a esfera, tendo, portanto, uma posição aparente sobre esta. A posição de um astro relativamente a outro na esfera celeste pode e é definida usando coordenadas angulares.

Sistema Horizontal

Direção Vertical:

A direção diretamente acima ou abaixo de um observador. De forma mais precisa, direção da aceleração gravitacional no ponto da superfície terrestre onde ele se encontra.

Zênite:

O ponto da esfera celeste que resulta do prolongamento ao infinito da vertical do observador no sentido contrário à gravidade. Ponto da esfera celeste diretamente acima da cabeça do observador

Nadir:

A direção diretamente abaixo do observador, ou seja, o ponto da esfera celeste diametralmente oposto ao zênite.

Plano horizontal:

Plano perpendicular à direção vertical de um observador e que contenha o mesmo.

Horizonte:

O círculo máximo que resulta do prolongamento do plano horizontal do observador até encontrar a esfera celeste; é a intersecção entre a esfera celeste e o plano perpendicular à vertical do observador.

Meridiano Astronômico:

O grande círculo que passa pelo zênite do observador e pelos pontos cardeais norte e sul. É ao mesmo tempo um círculo vertical (perpendicular ao horizonte) e um círculo horário. O meridiano de um observador é o seu mais importante círculo de referência.

Plano Meridiano:

Plano que contém o meridiano astronômico. É o mesmo plano que contém o observador e o eixo de rotação da Terra

Plano Vertical:

Qualquer plano perpendicular ao plano horizontal. Plano vertical de um astro é o plano que contém o círculo vertical do mesmo.

Círculo Vertical:

Qualquer grande círculo que contenha o zênite e o nadir. Seu nome se deve ao fato de ser um círculo perpendicular ao horizonte.

Altura (h):

Trata-se de uma das coordenadas do sistema horizontal (a outra é o azimuth). A altura de um objeto é o ângulo entre a direção ao objeto e a horizontal, ângulo este contado ao longo do círculo vertical que contém o astro. A altura pode ser tanto positiva ($h > 0^\circ$, astro acima do horizonte) quanto negativa ($h < 0^\circ$, astro invisível, abaixo do horizonte). A altura do zênite é $h = 90^\circ$ e a do nadir é $h = -90^\circ$.

Azimuth (A):

Outra coordenada horizontal. É o ângulo, contado ao longo do horizonte, entre a direção norte e a base do círculo vertical do astro. Outra forma de defini-lo é como sendo o ângulo entre o plano meridiano do observador e o vertical do astro. É geralmente contado no sentido norte-leste-sul-oeste. $A = 0^\circ$: ponto cardeal norte; $A = 90^\circ$: ponto cardeal leste; $A = 180^\circ$: ponto cardeal sul; $A = 270^\circ$: ponto cardeal oeste.

Almucântar:

Círculo de altura constante paralelo ao horizonte. Chama-se também de paralelo de altura.

Sistema Equatorial

Pólos Celestes:

São os pontos da esfera celeste que resultam do prolongamento do eixo de rotação da Terra. Os pólos celestes norte e sul são pontos fixos da esfera celeste, ou seja, não se movem no céu de um observador durante a noite. Para um observador situado em um dos pólos geográficos da Terra, o pólo celeste correspondente coincide com o zênite.

Equador Celeste:

O grande círculo que resulta da intersecção entre o plano equatorial terrestre e a esfera celeste.

Círculo (ou Arco) Diurno:

O caminho aparente de uma estrela no céu durante um dia, devido à rotação da Terra. Círculos diurnos são paralelos ao equador celeste e são círculos pequenos (exceto por uma estrela situada no equador celeste).

Círculo Horário:

Qualquer grande círculo que contenha os pólos celestes norte e sul. Os círculos horários são perpendiculares ao equador celeste, assim como os círculos verticais são perpendiculares ao horizonte.

Ponto Vernal (γ):

O ponto da esfera celeste onde se situa o Sol no Equinócio de março (em torno de 21/03). Este ponto se situa sobre o equador celeste e, ao passar por este ponto, o Sol sai do hemisfério sul celeste e entra no hemisfério norte celeste. Também chamado de Ponto γ ou Ponto de Áries.

Ascensão Reta (α):

É uma das coordenadas do sistema equatorial. É o ângulo, medido ao longo do equador celeste, entre o ponto vernal e a base do círculo horário que contém o objeto. Outra definição: ângulo entre o plano que contém o círculo horário do ponto vernal e o plano que contém o círculo horário do astro. A ascensão reta cresce no sentido leste e, em geral, é contada em unidades de tempo ($1h = 15^\circ$; $24h = 360^\circ$).

Declinação (δ):

O ângulo entre a direção a um objeto e o plano do equador celeste, medido ao longo do círculo horário do objeto. A declinação pode ser norte ou sul, casos em que $\delta > 0^\circ$ e $\delta < 0^\circ$, respectivamente. Pólo Sul Celeste: $\delta = -90^\circ$; Pólo Norte Celeste: $\delta = 90^\circ$.

Ângulo Horário (H):

O ângulo, contado a oeste, entre o meridiano do observador e o círculo horário do objeto. Geralmente expresso em unidades de tempo.

Eclíptica:

O caminho aparente do Sol na esfera celeste ao longo do ano. O movimento anual do Sol se deve à revolução da Terra ao longo de sua órbita em torno do mesmo. A eclíptica é, portanto, a intersecção entre o plano orbital terrestre e a esfera celeste. A eclíptica faz um ângulo de aproximadamente $23,5^\circ$ com o Equador Celeste. Os dois pontos de intersecção entre estes dois grandes círculos são o ponto Vernal (γ) e o ponto Ω , o primeiro dos quais marca a origem da ascensão reta.

Quadro resumo de coordenadas celestes

Sistema	Horizontal	Horário	Uranográfico	Eclíptica
Plano Fundamental	Horizonte	Equador	Equador	Eclíptica
Abscissa	Azimute	Âng. Horário	Ascensão reta	Longitude
Símbolo	A	H	α	λ
Origem	Pólo Norte	SMS	Ponto Vernal	Ponto Vernal
Sentido	Direto (para Leste)	Retrógrado (para Oeste)	Direto	Direto
Variação	0° a 360°	0h a 24h	0° a 360°	0° a 360°
Ordenada	Altura (Dist. Zenital)	Declinação (Dist. Polar)	Declinação (Dist. Polar)	Latitude
Símbolo	h (Z)	δ (p)	δ (p)	β
variação	-90° a 90° (0° a 180°)	-90° a 90° (0° a 180°)	-90° a 90° (0° a 180°)	-90° a 90°
Referenciamento	Local	Misto	Não-local	Não-local
Eixos	Vertical (+) $\rightarrow$ Z	Eixo de rotação	Eixo de rotação	Eixo da eclíptica

		(+) → PN	(+) → PN	(+) → PN
Nº 3	Meridiana	Linha EW	Linha Equin.	Linha Equin.
Nº 1	(+) → Pólo Sul	(+) → Oeste	(+) → Pt. Vernal	(+) → Pt. Vernal
Nº 2	Levógiro	Levógiro	Dextrógiro	Dextrógiro

Fonte: Caderno Técnico – Introdução à Astronomia Esférica I – Camil Gemael (1980)

Dedução das principais fórmulas do método de Zinger

Abaixo, encontra-se a dedução das expressões (IV) e (V) dadas na apresentação do Método de Zinger para determinação da hora. Com elas podemos então obter o valor de c e inseri-lo na Eq. (III) para deduzir o estado do cronômetro E.

Usando uma das fórmulas dos 4 elementos aplicada à estrela que atravessa o almucântar escolhido a leste do meridiano temos:

$$\cos(z) = \text{sen}(\phi)\text{sen}(\delta_E) + \cos(\phi)\cos(\delta_E)\cos(H_E)$$

Aplicando agora a mesma fórmula à estrela a oeste:

$$\cos(z) = \text{sen}(\phi)\text{sen}(\delta_W) + \cos(\phi)\cos(\delta_W)\cos(H_W)$$

Como se trata do mesmo almucântar, z é igual em ambas as equações, logo:

$$\text{sen}(\phi)[\text{sen}(\delta_E) - \text{sen}(\delta_W)] = \cos(\phi)[\cos(\delta_W)\cos(H_W) - \cos(\delta_E)\cos(H_E)]$$

$$\tan(\phi)[\text{sen}(\delta_E) - \text{sen}(\delta_W)] = \cos(\delta_W)\cos(H_W) - \cos(\delta_E)\cos(H_E) \quad (\text{A1})$$

Utilizemos agora as seguintes identidades trigonométricas:

$$\text{sen}(p) - \text{sen}(q) = 2\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \quad (\text{A.2})$$

$$\cos(p)\cos(q) - \cos(r)\cos(s) = \frac{1}{2}[\cos(p) - \cos(r)][\cos(q)\cos(s) + \frac{1}{2}[\cos(p) + \cos(r)][\cos(q) - \cos(s)] \quad (\text{A.3})$$

Usando-as na equação (A.1), temos:

$$\begin{aligned} \tan(\phi)2\text{sen}\left(\frac{\delta_E - \delta_W}{2}\right)\cos\left(\frac{\delta_E + \delta_W}{2}\right) &= \frac{1}{2}[\cos(\delta_W) - \cos(\delta_E)][\cos(H_W) + \cos(H_E)] + \\ &+ \frac{1}{2}[\cos(\delta_W) + \cos(\delta_E)][\cos(H_W) - \cos(H_E)] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Usando agora mais duas identidades trigonométricas,

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Ao lado direito da equação obtemos:

$$2 \tan(\phi) \operatorname{sen}(\beta) \cos(b) = 2 \cos(c) \cos(\gamma) \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(b) + 2 \cos(b) \cos(\beta) \operatorname{sen}(c) \operatorname{sen}(\gamma)$$

$$\tan(\phi) \tan(\beta) = \operatorname{sen}(\gamma) [\cos(c) \cot an(\gamma) \tan(\beta) \tan(b) + \operatorname{sen}(c) \operatorname{sen}(\gamma)]$$

$$\tan(\phi) \tan(\beta) = \operatorname{sen}(\gamma) [\cos(c) \cot an(\gamma) \tan(\beta) \tan(b) + \operatorname{sen}(c)]$$

Usando a definição de $\tan(M)$ dada anteriormente:

$$\tan(\phi) \tan(\beta) = \cos(c) \operatorname{sen}(\gamma) \tan(M) + \operatorname{sen}(c) \operatorname{sen}(\gamma)$$

$$\tan(\phi) \tan(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\cos(M)} [\operatorname{sen}(M) \cos(c) + \cos(M) \operatorname{sen}(c)]$$

$$\operatorname{sen}(M + C) = \tan(\phi) \tan(\beta) \cos(M) \operatorname{cosec}(\gamma)$$

Essa é a fórmula que queríamos demonstrar e que é utilizada na determinação de c e, conseqüentemente, na derivação do estado do cronômetro, E.

BIBLIOGRAFIA

1. Anuário Astronômico do Instituto Astronômico e Geofísico da USP, IAG, São Paulo.
2. Anuário do Observatório Nacional, Observatório Nacional, Rio de Janeiro.
3. Apparent Places of Fundamental Stars, Astronomisches Rechen-Institut, Verlag G. Braun, Heidelberg, Germany
4. Arana, J.M., Notas de Aula. Endereço na Web:
<http://www2.prudente.unesp.br/dcartog/arana/Astron.pdf>.
5. Astronomy 250 lecture notes. Endereço na Web:
http://ircamera.as.arizona.edu/astr_250/class_syl.html.
6. Boczko, R., " Conceitos de Astronomia ", Edgar Blucher, São Paulo.
7. Domingues Felipe A.A. Topografia e astronomia de posição para engenheiros e arquitetos São Paulo, McGraw-hill do Brasil 1979.
8. Domingues, F.A.A., 1979, Topografia e Astronomia de Posição para Engenheiros e Arquitetos, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo.
9. Gemaël, C., 1980, "Astronomia Esférica", Ed. da UFPR, Curitiba.
10. Gemaël, C., 1981, "Referenciais Cartesianos Utilizados em Geodésia", Ed. da UFPR, Curitiba.
11. Haertel, J.C., 1957, Geodésia Elementar e Astronomia de Campo, Edições Ceue, Porto Alegre
12. Hatschbach, F., "Determinações Astronômicas, Hipparcos Astrometric Satellite. Endereço na Web: <http://astro.estec.esa.nl/Hipparcos>.
13. International Celestial Reference Frame. Endereço na Web: <http://rorf.usno.navy.mil/ICRF>.
14. Lang, K., 1990, "Astrophysical Formulae: a compendium for the physicist and astrophysicist", Berlim, ISBN 0-387-09933-6.
15. Médici, R., 1989, "Astronomia de Posição", Ed. Forense Universitária.
16. Proceedings da Conferência contendo artigos de determinação astronômica do Magro.
17. Roy Fisher's Earth Rotation and Equatorial Coordinates web page. Endereço na Web:
http://www.gb.nrao.edu/~rfisher/Ephemerides/earth_rot.html.
18. Terry Moore's web page on Coordinate Systems, Frames and Datums. Endereço na Web:
<http://granby.nott.ac.uk/~iszwww/coord1.htm>.
19. The Astronomical Almanac, Washington, U.S. Government
Tutorials for Astronomy. Endereço na Web: <http://www.physics.csbsju.edu/astro/>